

4. Vor- und Nachteile des Verfahrens. Zum Schlusse sei noch von den Vor- und Nachteilen die Rede, die das Arbeiten nach dem hier entwickelten Verfahren mit sich bringt. Dabei ist zweierlei grundsätzlich zu trennen: das Seifenhautgleichnis und das Auswerteverfahren.

Bei dem Seifenhautgleichnis nach **L. Föppl** ist der Überdruck $p = 0$. Damit entfällt gegenüber dem Prandtlschen Seifenhautgleichnis die Auswertung des Vergleichshügels. Ebenso sind damit Störungen, hervorgerufen durch Druckschwankungen während der Auswertung, ausgeschaltet. Die Zerlegung der Spannung τ in die Glieder τ_1 und τ_2 und die Beschränkung auf τ_2 beim Gleichnis ist sehr fruchtbar, weil dadurch gerade das Charakteristische an der Spannungsverteilung eines Querschnitts aufgedeckt wird, wie man an den Beispielen ersehen hat. Ein Nachteil des Verfahrens ist die schwierige Herstellung der Randträger, die genau gearbeitet sein müssen.

Über die Vorteile der photogrammetrischen Auswertung wurde zum Teil schon früher gesprochen. Sie seien hier nochmals zusammengefaßt. Der Hauptvorteil liegt darin, daß die Haut selbst nur zur Aufnahme benötigt wird, während die Auswertung zu beliebiger Zeit geschehen kann und dabei doch jederzeit einer Nachprüfung zugänglich ist. Ferner ist von großer Wichtigkeit, daß der Auswertung nur ein augenblicklicher Zustand der Haut zugrunde liegt. Die Ablesegenauigkeit ist sehr groß, zumal der auftretende Fehler von $\pm 0,05$ mm beim Aufzeichnen der Profile noch verbessert werden kann. Auch erlaubt der Stereoplanigraph ein sehr genaues Aufzeichnen der Querschnitte in starker (5facher) Vergrößerung, so daß die graphische Bildung des Differentialquotienten $\partial F_2 / \partial n$ und das Ziehen der Tangenten an die Kurven $F_2 = \text{konst}$ mit großer Genauigkeit geschehen kann. Ein Nachteil des Aufnahmeverfahrens ist es, daß die Haut bestäubt werden muß, was einige Übung erfordert. Der Einfluß der durch das Bestäuben eintretenden Gewichtsvermehrung der Haut liegt unter der meßbaren Grenze.

IV. Zusammenfassung.

Die theoretischen Grundlagen des Seifenhautgleichnisses nach **L. Föppl** werden entwickelt. Es wird ein photogrammetrisches Verfahren zur Auswertung von Seifenhautoberflächen angegeben und seine Brauchbarkeit am quadratischen Querschnitt nachgewiesen. Ferner wird an Hand des quadratischen Querschnitts mit verschiedenen zentrischen Bohrungen ein Weg zur Untersuchung von Hohlquerschnitten gezeigt. Vor- und Nachteile des Verfahrens werden auseinandergesetzt.

(Eingegangen am 13. September 1934.)

Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern.

Von **F. W. Waltking** in München.

1. Vorbemerkung. Biegezugfeste Stäbe mit gekrümmter Achse bilden für verschiedene Zweige der Technik ein wichtiges Konstruktionselement, ihre elastischen Eigenschwingungen sind daher bereits in einer Reihe von Veröffentlichungen behandelt worden. Und doch sind nicht wenige, zum Teil recht wichtige Fragen bisher ungeklärt geblieben.

Die Schwingungsuntersuchung eines Bogenträgers gestaltet sich am einfachsten, wenn man seine Achse als undehnbar ansieht. Die Differentialgleichung, welche

sich so ergibt, findet man bei **A. E. H. Love**¹ u. a.²; dort werden sodann die Lösungen für den geschlossenen Kreisring und die Schraubenfeder angegeben. Die Anwendung auf den unvollständigen Ring, d. h. den Bogenträger, behandelt zuerst **H. Lamb**³; er kommt jedoch zu der Feststellung, daß „die Deutung der Lösungen im allgemeinen schwierig sein wird, außer in dem Fall, daß die Anfangskrümmung gering ist“. Diese Bemerkung findet man in der Literatur an verschiedenen Stellen wiederholt, trotzdem die Schwierigkeiten, wie die vorliegende Arbeit⁴ zeigen wird, sich zum Teil auf recht einfachem Wege überwinden lassen.

Die Dehnungen der Stabachse können jedoch, wie bereits bekannt ist, erheblichen Einfluß auf die Schwingungszahl haben. Das ergibt sich schon daraus, daß die einfachste Schwingungsform, eine solche ohne Zwischenknoten (vgl. Abb. 7a von Ziff. 9) nur durch derartige Dehnungen zustande kommen kann.

Den geschlossenen Kreisring mit dehnbarer Achse, und zwar unter radialer Druckbeanspruchung, behandelt **K. Federhofer**⁵ mit Hilfe einer Differentialgleichung, er vernachlässigt jedoch den Teil der Achsendehnung, welcher durch die Schwingungen verursacht wird.

Da die Lösung durch eine Differentialgleichung sehr umständliche Rechnungen erfordert, liegt es nahe, an ihrer Stelle ein Näherungsverfahren, etwa nach **Rayleigh**⁶ oder **Ritz**⁷ zu benutzen. Das geschieht daher in fast allen bisher bekannten Untersuchungen des Bogenträgers, also des unvollständigen Ringes.

Solange die Stabachse wieder als dehnungslos angesehen wird, ergeben sich ziemlich einfache Ansätze. Es entsteht dann jedoch die Frage, ob die niedrigste Schwingungszahl, deren Kenntnis gewöhnlich am wichtigsten ist, nicht vielleicht gerade durch Achsendehnungen erzeugt wird.

Mit der Beantwortung dieser Frage befassen sich **J. P. den Hartog**⁸ und **K. Federhofer**⁹, letzterer wiederum im Falle einer radialen Belastung. Beide arbeiten mit den Energieverfahren, und es gelingt, auch ohne Kenntnis des exakten Dehnungsgesetzes für die Bogenachse, Näherungsformeln abzuleiten, die vorzüglich brauchbar sind, freilich nur, solange es sich wirklich um die niedrigste Schwingungszahl handelt.

Wenn aber auch auf diese Weise die besonders wichtige niedrigste Eigenfrequenz genügend genau bestimmt werden kann, so verbleibt noch eine Reihe von Fragen, für deren Lösung die Differentialgleichung das gegebene Mittel ist.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die bisher noch nicht veröffentlichte Differentialgleichung mit vollständiger Berücksichtigung der Achsendehnungen abgeleitet. Sodann wird gezeigt, daß man mit Hilfe der Differentialgleichungen auch unter wesentlich geringeren Beschränkungen doch zu eindeutigen Lösungen kommen kann. Schließlich werden in der Anwendung auf den beiderseits gelenkig gestützten Bogenträger Untersuchungen angestellt 1. über die Umstände, unter denen die Achse als dehnungslos angesehen werden kann, 2. über den Einfluß verschiedener Pfeilhöhen (Zentriwinkel) der Bogenträger auf die Eigenschwingungszahl und 3. über die mit der Änderung der Frequenz verbundene Änderung der Schwingungsform.

¹ **A. E. H. Love**, Lehrbuch der Elastizität (deutsch von **A. Timpe**), S. 517, Leipzig 1907.

² Z. B. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. III, S. 342, Leipzig 1927 oder Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 374, Berlin 1928.

³ **H. Lamb**, Proc. Lond. math. Soc. 19 (1888) S. 365.

⁴ Diese Arbeit wurde im wesentlichen (z. B. bis auf einen Teil der unter Ziff. 8 bis 10 mitgeteilten Ergebnisse) bereits im Jahre 1932 fertiggestellt. Die Berücksichtigung der seitdem erschienenen Veröffentlichungen wurde nachträglich eingefügt.

⁵ **K. Federhofer**, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 110.

⁶ Vgl. z. B. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 363.

⁷ Vgl. z. B. **S. Timoshenko**, Schwingungsprobleme (deutsch von **Malkin-Helly**), S. 288, Berlin 1927.

⁸ **J. P. den Hartog**, Philos. Mag. 5 (1928) S. 400.

⁹ **K. Federhofer**, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 276.

A. Aufstellung der Differentialgleichungen.

2. Das elastische Verhalten gekrümmter Stäbe. In der Literatur¹ über die statische Biegung des gekrümmten Stabes in seiner Ebene wird, soweit der Stab als eindimensional angesehen wird, gewöhnlich die Annahme gemacht, daß die Mittellinie des Stabes dehnungslos bleibt. Wie schon aus der Vorbemerkung hervorgeht, kann von dieser Voraussetzung hier nicht Gebrauch gemacht werden.

Die Aufstellung einer Theorie des eindimensionalen Bogenträgers mit dehnbare Achse bereitet zwar gewisse Schwierigkeiten (vgl. hierzu **K. Wieghardt**² und **Th. Pöschl**³); darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden. Um die elastischen Eigenschaften des Bogenträgers auszudrücken, werden die Beziehungen gewählt, wie sie **Pöschl**⁴ zur Berechnung zylindrischer Schalen benutzt⁵. Die Gleichungen für die elastischen Verschiebungen sollen dabei unter Anlehnung an **Love**⁶ neu abgeleitet werden, damit ein scheinbarer Widerspruch (vgl. S. 432) aufgeklärt werden kann.

Der Kreisbogen werde auf ein Polarkoordinatensystem (r, ϑ) bezogen, die Gleichung seiner Mittellinie laute

$$r = r_0 = \text{konst.}$$

Die an einem Stabelement angreifenden äußeren Kräfte, bezogen auf die Längeneinheit der Stabachse, seien X und Z , wobei die x -Achse radial, die z -Achse tangential

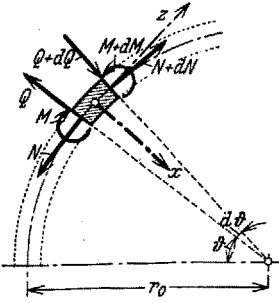


Abb. 1. Längenelement des Bogenträgers.

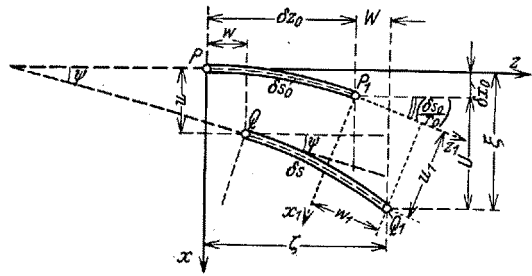


Abb. 2. Elastische Verschiebung eines Bogenelementes.

gerichtet sei. Mit den Spannungsergebnissen $N =$ Normalkraft, $Q =$ Querkraft, $M =$ Biegemoment (Abb. 1) ergeben sich für das Gleichgewicht eines Stabelementes die Bedingungen:

$$\frac{dQ}{d\vartheta} + N + X r_0 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dN}{d\vartheta} - Q + Z r_0 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dM}{d\vartheta} - Q r_0 = 0. \tag{3}$$

In der letzten dieser Gleichungen ist das Moment der äußeren Kräfte, da es von höherer Ordnung klein ist, in der gleichen Weise vernachlässigt, wie es beim geraden Stabe üblich ist.

Der Verzerrungszustand des Bogenträgers wird beschrieben durch Gleichungen für die elastischen Verschiebungen u (radial) und w (tangential). Diese ergeben sich aus folgender Betrachtung.

Ein Bogenelement δs_0 (Abb. 2) habe vor der Verformung die Lage $P - P_1$, nachher die Länge δs und die Lage $Q - Q_1$. Bezogen auf das Achsensystem (x, z) mit dem

¹ Vgl. z. B. die Literaturangaben unter 1, S. 433.

² **K. Wieghardt**, Sitzungsber. Wien. Akad. Abt. IIa 124 (1915) S. 1119.

³ **Th. Pöschl**, Z. angew. Math. Mech. 7 (1927) S. 189.

⁴ **Th. Pöschl**, Berechnung von Behältern, S. 57, 2. Aufl., Berlin 1926.

⁵ Der Ansatz von **R. Mayer** (Die Knickfestigkeit, S. 140, Berlin 1921), in dem ebenfalls die Dehnungen berücksichtigt sind, gilt nur für flache Bögen.

⁶ **Love**, S. 511 (s. Literaturangabe 1 von Ziff. 1).

Ursprung in P sollen die Koordinaten des Punktes P_1 mit δx_0 und δz_0 , die des Punktes Q mit u und w und die des Punktes Q_1 mit ξ und ζ bezeichnet werden. In bezug auf das (x_1, z_1) -System mit dem Ursprung in P_1 habe der Punkt Q_1 die Koordinaten u_1 und w_1 , ferner seien die Verschiebungen des Punktes P_1 (nach Q_1), gemessen im (x, z) -System von P , mit U und W bezeichnet.

Die Verdrehung ψ des Querschnittes in P , d. h. der Winkel zwischen den beiden Bogentangenten in P und Q , läßt sich sowohl durch den Sinus als auch durch den Cosinus angeben. Beide entstehen als Grenzwerte für $\delta s_0 \rightarrow 0$, und zwar

$$\sin \psi = \lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{\xi - u}{\delta s}, \quad \cos \psi = \lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{\zeta - w}{\delta s}. \quad (4)$$

Nun ist, wenn mit ε die Dehnung der Mittellinie bezeichnet wird,

$$\delta s = (1 + \varepsilon) \delta s_0;$$

ferner wird

$$\begin{aligned} \xi &= \delta x_0 + U = \delta x_0 + u_1 \cos \left(\frac{\delta s_0}{r_0} \right) + w_1 \sin \left(\frac{\delta s_0}{r_0} \right), \\ \zeta &= \delta z_0 + W = \delta z_0 - u_1 \sin \left(\frac{\delta s_0}{r_0} \right) + w_1 \cos \left(\frac{\delta s_0}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Setzt man $\sin \left(\frac{\delta s_0}{r_0} \right) = \frac{\delta s_0}{r_0}$ und beachtet, daß beim Grenzübergang

$$\lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{\delta x_0}{\delta s_0} = 0, \quad \lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{\delta z_0}{\delta s_0} = 1, \quad \lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \cos \left(\frac{\delta s_0}{r_0} \right) = 1,$$

$$\lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{u_1 - u}{\delta s_0} = \frac{d u}{d s}, \quad \lim_{\delta s_0 \rightarrow 0} \frac{w_1 - w}{\delta s_0} = \frac{d w}{d s}$$

werden, so folgt

$$\sin \psi = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(\frac{d u}{d s} + \frac{w}{r_0} \right), \quad (5)$$

$$\cos \psi = \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(1 + \frac{d w}{d s} - \frac{u}{r_0} \right). \quad (6)$$

Um ε zu finden, sind die Gleichungen (5) und (6) zu quadrieren und zu addieren. Das gewünschte Ergebnis erhält man jedoch auch schon dadurch, daß man $\sin \psi \approx \psi$, $\cos \psi \approx 1$ einführt, denn ψ ist stets ein sehr kleiner Winkel. Setzt man in (5) noch $1 + \varepsilon \approx 1$, so erhält man die von **Pöschl** angegebenen Beziehungen:

$$\psi = \frac{d u}{d s} + \frac{w}{r_0} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{d u}{d \vartheta} + w \right), \quad (7)$$

$$\varepsilon = \frac{d w}{d s} - \frac{u}{r_0} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{d w}{d \vartheta} - u \right). \quad (8)$$

Bei seiner Ableitung setzt **Love** bereits in den hier mit (4) bezeichneten Gleichungen $\delta s = \delta s_0$, so daß bei ihm (6) lautet

$$\cos \psi = 1 + \frac{d w}{d s} - \frac{u}{r_0}. \quad (6a)$$

Würde man dies mit (8) zusammenfügen, so ergäbe sich, daß ε immer negativ sein muß, da der Cosinus nie größer als Eins sein kann. Dieser Widerspruch ist durch den Unterschied zwischen den Gleichungen (6) und (6a) aufgeklärt.

Für die Dehnung einer Faser des Stabelementes, welche den Abstand x von der Achse hat, ergibt sich

$$\varepsilon_x = \frac{1}{r_0 - x} \left(\frac{d w}{d \vartheta} - u \right) - \frac{x}{r_0 - x} \frac{d \psi}{d \vartheta}$$

oder, wenn man x gegenüber r_0 vernachlässigt,

$$\varepsilon_x = \varepsilon - \frac{x}{r_0} \frac{d \psi}{d \vartheta}. \quad (9)$$

Mit Hilfe der drei Gleichungen (7), (8) und (9) gelingt es nun, Normalkraft und Moment durch die Verschiebungsgrößen auszudrücken. Es ist mit $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ und

$$\int x dF = 0$$

$$N = \int \sigma_x dF = E \int \epsilon_x dF = E \epsilon F - \frac{E}{r_0} \frac{d\psi}{d\vartheta} \int x dF,$$

$$M = \int \sigma_x x dF = E \epsilon \int x dF - \frac{E}{r_0} \frac{d\psi}{d\vartheta} \int x^2 dF = - \frac{EJ}{r_0} \frac{d\psi}{d\vartheta},$$

oder

$$N = \frac{EF}{r_0} \left(\frac{dw}{d\vartheta} - u \right), \tag{10}$$

$$M = - \frac{EJ}{r_0^2} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \frac{dw}{d\vartheta} \right). \tag{11}$$

Darin sind mit E das Elastizitätsmaß des Materials, mit F und J Fläche und Trägheitsmoment des Stabquerschnittes, letzteres bezogen auf die Biegungsachse, an der Stelle (r_0, ϑ) bezeichnet.

Durch Elimination von $\frac{dw}{d\vartheta}$ ergibt sich aus (10) und (11) schließlich die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = - \frac{M r_0^2}{EJ} - \frac{N r_0}{EF};$$

sie unterscheidet sich von der bekannten Form [s. Gleichung (14)] nur durch das letzte Glied.

Aus (7) bis (11) lassen sich die aus der Literatur¹ bekannten Beziehungen, welche sich aus der Annahme der Dehnungslosigkeit der Mittellinie ergeben, sehr schnell gewinnen. Mit $\epsilon = 0$ wird nach (8)

$$u = \frac{dw}{d\vartheta}; \tag{12}$$

für den Verdrehungswinkel ψ eines Querschnittes folgt aus (7)

$$\psi = \frac{1}{r_0} \left(\frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + w \right); \tag{13}$$

schließlich entsteht die Gleichung der elastischen Linie aus (11)

$$M = - \frac{EJ}{r_0^2} \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right) \tag{14}$$

oder

$$M = - \frac{EJ}{r_0^2} \left(\frac{d^3 w}{d\vartheta^3} + \frac{dw}{d\vartheta} \right). \tag{15}$$

3. Die Schwingungsdifferentialgleichungen. Mit Hilfe der unter Ziff. 2 angegebenen Gleichungen (1), (2), (3), (10), (11) läßt sich nunmehr ohne grundsätzliche Schwierigkeiten die Differentialgleichung der Biegungsdehnungsschwingungen ableiten. Die in Ziff. 2 für statische Beanspruchungen abgeleiteten Beziehungen gelten ja in derselben Form für die zusätzlichen Größen M, Q usw. aus einer Schwingungsbeanspruchung, wenn man für die letztere, wie es hier geschieht, die statische Gleichgewichtslage als Nullage wählt. — An Stelle der äußeren Kräfte X und Z sind nach dem d'Alembertschen Prinzip die Trägheitswiderstände in radialer bzw. in tangentialer Richtung einzuführen, also

$$X = - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Z = - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{16}$$

¹ Vgl. z. B. **A. Clebsch**, Elastizität fester Körper, § 55, Leipzig 1862; **A. E. H. Love**, a. a. O. § 259 und Kapitel XXI; Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, Bd. III, S. 148; Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 181; **J. Boussinesq**, C. R. Acad. Sci., Paris 97 (1883) S. 843; **H. Lamb**, a. a. O.; **R. Mayer**, Z. Math. Physik 61 (1913) S. 246; **R. Mayer**, Die Knickfestigkeit, III. Abschnitt; **A. Föppl**, Technische Mechanik III § 38. Leipzig 1922; **K. Federhofer**, Eisenbau 12 (1921) S. 289.

wenn unter μ die Masse des Stabes, bezogen auf die Längeneinheit, verstanden werden soll.

Aus (3) folgt zunächst

$$Q = \frac{1}{r_0} \frac{\partial M}{\partial \vartheta};$$

daß darin der Einfluß der äußeren Kräfte nicht berücksichtigt ist, entspricht jetzt der Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit des Stabelementes.

Mit Hilfe dieses Ausdruckes kann Q aus den Gleichungen (1) und (2) eliminiert werden; so ergibt sich

$$N = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 M}{\partial \vartheta^2} - X r_0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \vartheta} = +\frac{1}{r_0} \frac{\partial M}{\partial \vartheta} - Z r_0. \quad (18)$$

Benützt man (17), um N aus (18) und (10) zu entfernen, und ersetzt ferner die Größe M durch den in (11) gegebenen Ausdruck, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^3 u}{\partial \vartheta^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{r_0^4}{EJ} \left(-\frac{\partial X}{\partial \vartheta} + Z \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} - u = \frac{J}{F r_0^3} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^3 w}{\partial \vartheta^3} - X \frac{r_0^4}{EJ} \right). \quad (20)$$

Durch einmaliges Differenzieren der Gleichung (20) und Subtrahieren von der mit $\frac{J}{F r_0^3}$ multiplizierten Gleichung (19) folgt

$$\frac{J}{F r_0^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \vartheta^3} - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \left(1 + \frac{J}{F r_0^3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{r_0^4}{EF} Z = 0. \quad (21)$$

Aus diesen Gleichungen (20) und (21) kann man nun die Verschiebungsgröße u und ihre Ableitungen, bei der höchsten beginnend, schrittweise eliminieren. Führt man schließlich die Ausdrücke (16) für X und Z ein, wobei sich X durch erneute Verwendung der Gleichung (21) sofort entfernen läßt, so ergibt sich die gesuchte Differentialgleichung der Biegungs-Dehnungsschwingungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^3 w}{\partial \vartheta^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \left\{ -\frac{\mu r_0^2}{EF} \frac{\partial^4 w}{\partial \vartheta^4} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu r_0^4}{EJ} + \frac{\mu r_0^2}{EF} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \vartheta^3} - \frac{\mu r_0^4}{EJ} w - \frac{\mu r_0^4}{EJ} \frac{\mu r_0^2}{EF} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die von **K. Federhofer**¹ abgeleitete Differentialgleichung für die Biegungsschwingungen des Kreisringes hat, wenn in ihr die Glieder aus der radialen Belastung gestrichen werden, mit der vorstehenden große Ähnlichkeit. Völlige Übereinstimmung besteht nicht, da **Federhofer** die periodischen Veränderungen der Stabachsendehnung während der Schwingungen vernachlässigt, indem er zum Teil von der Beziehung

$$u = \frac{\partial w}{\partial \vartheta}$$

[wie Gleichung (12)] Gebrauch macht.

Für die Untersuchung von Eigenschwingungen kann man diese partielle Differentialgleichung vereinfachen, indem man sie durch den Ansatz

$$w = \bar{w} \cos \omega t \quad (23)$$

in eine gewöhnliche verwandelt; darin ist mit ω die Kreisfrequenz der Schwingungen und mit \bar{w} eine nur von ϑ abhängige Funktion bezeichnet. Wegen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\bar{w} \cos \omega t \cdot \omega^2 \quad (24)$$

folgt nun aus (22), wenn $\cos \omega t$ überall herausgehoben wird,

¹ Vgl. Fußnote 5 von S. 430.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6 \bar{w}}{d\vartheta^6} + 2 \frac{d^4 \bar{w}}{d\vartheta^4} + \frac{d^2 \bar{w}}{d\vartheta^2} + \frac{\mu r_0^2}{EF} \omega^2 \frac{d^4 \bar{w}}{d\vartheta^4} - \omega^2 \left(\frac{\mu r_0^4}{EJ} + \frac{\mu r_0^2}{EF} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\vartheta^2} + \\ + \frac{\mu r_0^4}{EJ} \omega^2 \bar{w} - \frac{\mu r_0^4}{EJ} \frac{\mu r_0^2}{EF} \omega^4 \bar{w} = 0 \end{aligned} \right\}$$

oder, wenn man als abkürzende Bezeichnungen

$$k = \frac{\mu r_0^4}{EJ} \omega^2, \tag{25}$$

$$\alpha = \frac{J}{F r_0^2} = \left(\frac{i_0}{r_0} \right)^2 \tag{26}$$

einführt und beachtet, daß

$$\frac{\mu r_0^2}{EF} \omega^2 = \alpha k$$

ist,

$$\frac{d^6 \bar{w}}{d\vartheta^6} + (2 + \alpha k) \frac{d^4 \bar{w}}{d\vartheta^4} + (1 - k - \alpha k) \frac{d^2 \bar{w}}{d\vartheta^2} + (k - \alpha k^2) \bar{w} = 0. \tag{27}$$

Der durch (26) definierte Quotient α stellt nichts anderes dar als das ins Quadrat erhobene Verhältnis vom Trägheitsradius i_0 des Stabquerschnittes zum Bogenhalbmesser r_0 . — Der Ausdruck k in (25) ist eine in allen Schwingungsberechnungen für Bogenträger, auch in den Näherungsverfahren, vorteilhaft verwendbare Größe. Mit Ausnahme des Zentriwinkels φ_0 treten nämlich die Abmessungen des gegebenen Systems nur in den Werten k und α auf, außerdem erscheint die gesuchte Kreisfrequenz nur in dem Ausdruck k .

Die Differentialgleichung (27) für den Fall einer dehnbaren Stabachse läßt sich leicht umwandeln in diejenige für eine dehnungslose Mittellinie, wie sie in der Literatur seit langem bekannt ist¹. Zu diesem Zwecke ist die Bedingung der Undehnbarkeit (12)

$$u = \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \tag{28}$$

einzuführen. Dieselbe Bedingung ergibt sich aus (20), wenn man die Glieder mit α gegenüber den anderen vernachlässigt. Da nämlich der Trägheitsradius von Bogenträgern immer wesentlich kleiner ist als der Bogenradius, so kann man in vielen Fällen das Quadrat ihres Quotienten als von höherer Ordnung klein ansprechen, ohne die Genauigkeit des Ergebnisses zu beeinträchtigen. Mit dieser Bedingung

$$\alpha = \left(\frac{i_0}{r_0} \right)^2 \approx 0 \tag{28a}$$

geht (27) über in

$$\frac{d^6 \bar{w}}{d\vartheta^6} + 2 \frac{d^4 \bar{w}}{d\vartheta^4} + (1 - k) \frac{d^2 \bar{w}}{d\vartheta^2} + k \bar{w} = 0. \tag{29}$$

Dies ist die Differentialgleichung der dehnungslosen Biegungsschwingungen, wie man sie in der erwähnten Literatur findet.

B. Lösung der Differentialgleichungen.

4. Lösung für dehnungslose Stabachse. Zunächst möge die Lösung der Differentialgleichung (29) behandelt werden. Ein partikuläres Integral lautet

$$\bar{w} = \sum_{x=1}^{x=3} (A_x \cos n_x \vartheta + B_x \sin n_x \vartheta), \tag{30}$$

worin n_1, n_2, n_3 die Wurzeln der sog. Hauptgleichung

$$n^6 - 2 n^4 + (1 - k) n^2 - k = 0 \tag{31}$$

sind. Die Randbedingungen, die der Ansatz (30) befriedigen muß, sind auszudrücken durch

¹ Vgl. Fußnote 1 bis 3 von S. 430.

\bar{w} , die Tangentialordinate,

$\bar{u} = \frac{d\bar{w}}{d\theta}$; die Radialordinate,

$\bar{\varphi} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{d\bar{u}}{d\theta} + \bar{w} \right) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} + \bar{w} \right)$, die Tangentenneigung,

$\bar{M} = -\frac{EJ}{r_0^3} \left(\frac{d^3\bar{u}}{d\theta^3} + \frac{d\bar{w}}{d\theta} \right) = -\frac{EJ}{r_0^3} \left(\frac{d^3\bar{w}}{d\theta^3} + \frac{d\bar{w}}{d\theta} \right)$, das Biegemoment,

$\bar{Q} = -\frac{EJ}{r_0^3} \left(\frac{d^2\bar{u}}{d\theta^2} + \frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} \right) = -\frac{EJ}{r_0^3} \left(\frac{d^4\bar{w}}{d\theta^4} + \frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} \right)$, die Querkraft.

Um nun die Eigenschwingungszahlen eines vorgelegten Systemes zu ermitteln, sind mit Hilfe von Randbedingungen für die sechs Integrationskonstanten A_n, B_n jedes Einzelstabes sechs Bestimmungsgleichungen aufzustellen. Diese sind linear und homogen; wenn also überhaupt Schwingungen auftreten sollen, muß ihre Koeffizientendeterminante verschwinden. Aus dieser Bedingung ergibt sich die Frequenzgleichung, durch deren Auflösung man die Kreisfrequenzen ω und somit die gesuchten Eigenschwingungszahlen erhält.

Im Grundgedanken unterscheidet sich der Lösungsweg also nicht von demjenigen beim geraden Stabe; die Schwierigkeiten beginnen erst bei der Lösung der Frequenzgleichung, da nicht alle transzendenten Funktionen (wie beim geraden Stabe) dasselbe Argument haben, sondern deren drei vorkommen, die durch die unübersichtliche Gleichung sechsten Grades miteinander verknüpft sind. Da die Wurzeln dieser Gleichung auch imaginär und komplex sein können, entstehen die Deutungsschwierigkeiten, von denen in Ziff. 1 bereits die Rede war und die die Ursache dafür sind, daß die Literatur bisher noch keine für den Bogenträger durchgeführte Lösung dieser Differentialgleichung aufweist.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß diese Schwierigkeiten in einem gewissen Bereich nicht vorhanden sind. Zu diesem Zwecke soll die durch die Hauptgleichung (31) vorgeschriebene Abhängigkeit zwischen einer Unveränderlichen k und den drei Veränderlichen n_1, n_2, n_3 (es wird ja $n_4 = -n_1, n_5 = -n_2, n_6 = -n_3$) untersucht werden.

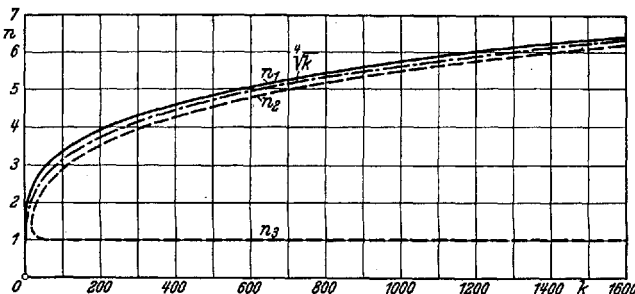


Abb. 3. Wurzeln der Hauptgleichung (31).

Zunächst zeigt sich, daß in der kubischen Gleichung, welche entsteht, wenn n^2 als Unbekannte aufgefaßt wird, für alle

$$k \geq 17,637$$

der „casus irreducibilis“¹ eintritt. Dieser Zahlenwert folgt aus der Beziehung

$$\left[\frac{1}{9} (3k + 1) \right]^3 \geq \left[\frac{1}{27} \left(\frac{45}{2} k - 1 \right) \right]^2.$$

Liegt k also oberhalb dieser Grenze, so sind alle drei Wurzeln n^2 der kubischen Gleichung reell. Außerdem läßt sich zeigen, daß dabei eine von ihnen, etwa n_1^2 , immer positiv bleibt, während n_2^2 und n_3^2 stets negative Werte annehmen, daß also oberhalb von $k = 17,637$ die Wurzel n_1 reell ist, während n_2 und n_3 imaginär sind.

Eine Darstellung der Abhängigkeit zwischen k und n_1, n_2, n_3 zeigt die Abb. 3, in welcher Imaginärwerte gestrichelt wiedergegeben und komplexe Wurzeln natürlich fortgelassen sind.

Aus dieser Abbildung lassen sich einige wertvolle Schlüsse ziehen. Von $k = 17,637$ bis $k = \infty$ behalten die Kurven ihren gleichartigen Charakter; wenn also, wie in der Vorbemerkung erwähnt, **H. Lamb** Schwierigkeiten bei der Deutung der Lösungen

¹ Vgl. z. B. Hütte I, S. 65, 26. Aufl., 1931.

feststellt, so kann dies nur für den Bereich $k \leq 17,637$ gelten. Oberhalb dieser Grenze liefert eine Frequenzgleichung eindeutige Ergebnisse und die Lösung bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr.

Eine direkte Beantwortung der Frage, ob für einen gegebenen Bogenträger die Grenze $k = 17,637$ nicht unterschritten wird, ist freilich nicht möglich, da ja in $k = \frac{\mu r_0^4 \omega^2}{EJ}$ die unbekannte Kreisfrequenz als Faktor auftritt. Einen Aufschluß darüber bringt die Arbeit von den Hartog¹, deren Werte C_1 und C_3 in den Tabellen I und III identisch sind mit \sqrt{k} . Danach gilt obige Bedingung nicht mehr, wenn beim Zweigelenkbogen der Zentriwinkel $\varphi_0 > 145^\circ$, beim eingespannten Bogen sogar $\varphi_0 > 180^\circ$ ist. Für die in der Praxis vorkommenden Systeme dürfte also die Bedingung stets erfüllt sein, wenn auch in Sonderfällen nicht ohne weiteres über ihre Nachprüfung hinweggeschritten werden darf.

Das Auftreten der imaginären Zahlen n_2 und n_3 , welches für die Lösung unbequem sein könnte, kann umgangen werden, indem man das partikuläre Integral der Differentialgleichung nicht in der Form (30), sondern durch

$$\bar{w} = A_1 \cos \nu_1 \vartheta + B_1 \sin \nu_1 \vartheta + A_2 \operatorname{Cof} \nu_2 \vartheta + B_2 \operatorname{Sin} \nu_2 \vartheta + A_3 \operatorname{Cof} \nu_3 \vartheta + B_3 \operatorname{Sin} \nu_3 \vartheta \quad (32)$$

wiedergibt. Darin ist $\nu_1 = n_1$, $i \nu_2 = n_2$, $i \nu_3 = n_3$ ($i = \sqrt{-1}$). Von der Brauchbarkeit dieses Integrals kann man sich durch Ausdifferenzieren leicht überzeugen.

Die Gleichung (32) kann in derselben Weise wie (30) zur Aufstellung der Frequenzgleichung benützt werden. Will man diese nun lösen, so betrachtet man sie am besten als Gleichung von der Form: $f(k) = 0$ und trägt die von Null verschiedenen Funktionswerte, die sich für beliebig gewählte k ergeben, als Kurvenordinaten auf. Die Nullstellen dieser Kurve liefern bestimmte Werte k , aus denen man nach (25) die gesuchten Kreisfrequenzen ω erhält.

Im übrigen sei auf das später behandelte Beispiel verwiesen, aus dem weitere Einzelheiten zu ersehen sind.

Ist statt des dort behandelten Zweigelenkbogens ein andersartiger Bogenträger zu untersuchen, so bleibt bei den geänderten Randbedingungen der Gang der Lösung der gleiche. Ebenso tritt keine grundsätzliche Abweichung ein, wenn Einzellasten, sprunghafte Querschnittsänderungen oder zusammengesetzte Systeme gegeben sind. Genau wie beim geraden Stabe ist dann (32) auf jeden einzelnen Bogenabschnitt bzw. Einzelbogen anzuwenden; der Zusammenhang wird durch Übergangsbedingungen hergestellt. Bei s derartigen Abschnitten ergibt sich so eine $(6s)$ -reihige Determinante.

5. Grenzübergang zum geraden Stabe. Eine weitere Folgerung, die sich aus Abb. 3 ergibt, besteht darin, daß bei wachsendem k die Größen ν nach bestimmten Grenzwerten streben. Mit Hilfe der trigonometrischen Lösungsformeln für kubische Gleichungen² kann man beweisen, daß für ν_1 und ν_2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu = \sqrt[4]{k}$$

gilt ($\sqrt[4]{k}$ ist die strichpunktierte Kurve in der Abb. 3), während man für ν_3 das bemerkenswerte Ergebnis erhält:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_3 = 1.$$

Auf die Wiedergabe des Beweises soll hier verzichtet werden.

Da die Größe $k = \frac{\mu r_0^4}{EJ} \omega^2$ mit der vierten Potenz des Bogenhalbmessers wächst, läßt sich mit Hilfe jener beiden Grenzwerte nun zeigen, daß die Gleichung (32) in dem Falle, daß der Bogenradius unendlich groß wird, in die Schwingungsgleichung

¹ S. Fußnote 8 von S. 430.

² S. Fußnote 1 von S. 436.

des geraden Stabes übergeht. Durch Einführen der Grenzwerte in (32) entsteht nämlich

$$\bar{w} = A_1 \cos(\sqrt[4]{k} \vartheta) + B_1 \sin(\sqrt[4]{k} \vartheta) + A_2 \mathfrak{Cof}(\sqrt[4]{k} \vartheta) + B_2 \mathfrak{Sin}(\sqrt[4]{k} \vartheta) + A_3 \mathfrak{Cof} \vartheta + B_3 \mathfrak{Sin} \vartheta.$$

Setzt man

$$\sqrt[4]{k} = r_0 \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EJ}} = r_0 m$$

und beachtet, daß für $r_0 = \infty$ der Winkel ϑ zu Null werden muß, damit die Argumente der Kreis- und Hyperbelfunktionen von endlicher Größe sein können, so erhält man $\bar{w} = A_1 \cos(m r_0 \vartheta) + B_1 \sin(m r_0 \vartheta) + A_2 \mathfrak{Cof}(m r_0 \vartheta) + B_2 \mathfrak{Sin}(m r_0 \vartheta) + A_3 \cdot 1 + B_3 \cdot 0$. Nun stellt $w = \bar{w} \cos \omega t$ die Schwingungsordinate in tangentialer Richtung dar, nach (28) ergibt sich aus ihr durch Differenzieren nach ϑ die radiale Ordinate u

$$u = \frac{\partial w}{\partial \vartheta} =$$

$$= \cos \omega t [-m r_0 A_1 \sin(m r_0 \vartheta) + m r_0 B_1 \cos(m r_0 \vartheta) + m r_0 A_2 \mathfrak{Sin}(m r_0 \vartheta) + m r_0 B_2 \mathfrak{Cof}(m r_0 \vartheta)].$$

Durch Einführung der Abszissen $z = r_0 \vartheta$ und der neuen Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3, C_4 erhält man schließlich die bekannte Gleichung für den geraden Stab¹

$$u = \cos \omega t (C_1 \sin m z + C_2 \cos m z + C_3 \mathfrak{Sin} m z + C_4 \mathfrak{Cof} m z).$$

6. Lösung bei dehnbarer Stabachse. Für den Fall der dehnbaren Stabmittellinie lautete die Schwingungs-Differentialgleichung (27):

$$\frac{d^6 \bar{w}}{d \vartheta^6} + (2 + \alpha k) \frac{d^4 \bar{w}}{d \vartheta^4} + (1 - k - \alpha k) \frac{d^2 \bar{w}}{d \vartheta^2} + (k - \alpha k^2) \bar{w} = 0. \quad (33)$$

Das zugehörige partikuläre Integral ist von der gleichen Form wie (30):

$$\bar{w} = \sum_{x=1}^3 (A_x \cos n_x \vartheta + B_x \sin n_x \vartheta); \quad (34)$$

nur heißt die Hauptgleichung, deren Wurzeln die drei Koeffizienten n_x sind, jetzt

$$n^6 - (2 + \alpha k) n^4 + (1 - k - \alpha k) n^2 - (k - \alpha k^2) = 0. \quad (35)$$

Drückt man wieder die Randbedingungen, die von (34) zu erfüllen sind, durch \bar{w} allein aus, so erhält man wesentlich kompliziertere Ausdrücke als im Falle dehnungsloser Stabachse. Sie können aus der Zwischenrechnung zur Ableitung der Schwingungs-Differentialgleichung, welche in Ziff. 3 nur gekürzt wiedergegeben ist, entnommen werden und lauten für die Radialordinate \bar{u} , die Tangentenrichtung $\bar{\psi}$ der Stabachse, die Normalkraft \bar{N} , das Biegemoment \bar{M} und die Querkraft \bar{Q} :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \beta \left[c_I \frac{d \bar{w}}{d \vartheta} - c_{III} \frac{d^3 \bar{w}}{d \vartheta^3} - \alpha \frac{d^5 \bar{w}}{d \vartheta^5} \right], & (a) \\ \bar{\psi} &= \frac{1}{r_0} \gamma \left[c_0 \bar{w} + c_{II} \frac{d^2 \bar{w}}{d \vartheta^2} + \alpha \frac{d^4 \bar{w}}{d \vartheta^4} \right], & (b) \\ \bar{N} &= \frac{EF}{r_0} \beta \left[\left(\frac{1}{\beta} - c_I \right) \frac{d \bar{w}}{d \vartheta} + c_{III} \frac{d^3 \bar{w}}{d \vartheta^3} + \alpha \frac{d^5 \bar{w}}{d \vartheta^5} \right], & (c) \\ \bar{M} &= -\frac{EJ}{r_0^2} \gamma \left[c_0 \frac{d \bar{w}}{d \vartheta} + c_{II} \frac{d^2 \bar{w}}{d \vartheta^2} + \alpha \frac{d^4 \bar{w}}{d \vartheta^4} \right], & (d) \\ \bar{Q} &= -\frac{EJ}{r_0^3} \gamma \left[c_0 \frac{d^2 \bar{w}}{d \vartheta^2} + c_{II} \frac{d^4 \bar{w}}{d \vartheta^4} + \alpha \frac{d^6 \bar{w}}{d \vartheta^6} \right]; & (e) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

darin bedeuten

$$\beta = \frac{1}{(1 - \alpha k)(1 + \alpha - \alpha^2 k)}, \quad \left\{ \begin{aligned} c_0 &= 1 + \alpha + \alpha k - \alpha^2 k, \\ c_I &= 1 + \alpha - \alpha^3 k^2, \end{aligned} \right. \\ \gamma = \frac{1}{1 + \alpha - \alpha^2 k}, \quad \left\{ \begin{aligned} c_{II} &= 1 + 2\alpha + \alpha^2 k, \\ c_{III} &= \alpha(1 + 2\alpha k). \end{aligned} \right. \quad (37)$$

¹ Vgl. z. B. W. Kaufmann, Z. angew. Math. Mech. 3 (1922) S. 34; W. Kaufmann, Bauing. 5 (1924) S. 500; W. Prager, Bauing. 8 (1927) S. 129; W. Prager, Z. techn. Physik 9 (1928) S. 223; W. Prager, Z. techn. Physik 10 (1929) S. 275; F. W. Waltking, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 247.

Der weitere Gang der Lösung, von den Randbedingungen über die Determinante der Koeffizienten A_n, B_n zur Frequenzgleichung, ist derselbe wie schon in Ziff. 4 angegeben.

Zunächst ist wieder eine Untersuchung anzustellen über die Größen n , welche jetzt nicht nur von der gesuchten Größe $k = \frac{\mu \omega^2}{E J} r_0^4$, sondern auch von dem gegebenen Verhältnis $\alpha = \left(\frac{i_0}{r_0}\right)^2$ abhängig sind. Während in Ziff. 4 die Abhängigkeit zwischen n und k also allgemeingültig war, muß sie nunmehr für den α -Wert des jeweils gegebenen Trägers neu berechnet werden.

Die Zahlenwerte der n , welche sich z. B. für $\alpha = 1/500$ ergeben, sind in Abb. 4 dargestellt, wobei imaginäre Beträge wiederum gestrichelt eingezeichnet sind. Ein Vergleich der beiden Abb. 3 und 4 zeigt eine fast völlige Übereinstimmung des Verlaufes der beiden n_1 und der beiden n_2 . Auch bei der Grenze $k = 17,637$, unterhalb deren die zugehörigen n -Werte komplex sein können, ist keine Verschiebung zu erkennen.

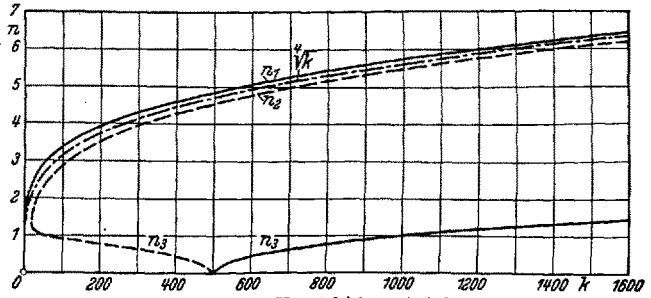


Abb. 4. Wurzeln der Hauptgleichung (35) für $1/\alpha = 500$.

Wesentlich voneinander verschieden ist jedoch der Verlauf der beiden n_3 -Kurven: in Abb. 3 strebt n_3 nach dem Grenzwert $n_3 = i = \sqrt{-1}$, während in Abb. 4 der imaginäre Wert n_3 zunächst abnimmt bis Null, dann reell wird und wieder ansteigt über Eins hinaus.

Für jedes andere Verhältnis α verlaufen die n -Kurven entsprechend: n_1 und n_2 sind praktisch dieselben wie bei dehnungsloser Stabachse, während n_3 an der Stelle $k = \frac{1}{\alpha}$ aus dem imaginären Bereich in den reellen übergeht.

Diese Nullstelle von n_3 rückt also für $\alpha = 0$ ins Unendliche, d. h. die n_3 -Kurve nähert sich asymptotisch einer Parallelen zur k -Achse, und zwar im Abstände $n_3 = \sqrt{-1}$, wie bereits früher gezeigt. Da $\alpha = \left(\frac{i_0}{r_0}\right)^2$ bei unendlich großem r_0 zu Null wird, läßt sich auch hier derselbe Grenzübergang zum geraden Stabe vornehmen wie in Ziff. 5.

Der eigenartige Charakter der n_3 -Kurve ändert an der grundsätzlichen Durchführbarkeit der Lösung nichts. Man kann zwar die Imaginärwerte aus der Zahlenrechnung ausschalten, indem man zwei ähnliche Ansätze wie (32) macht, von denen einer für $k < \frac{1}{\alpha}$, der andere für $k > \frac{1}{\alpha}$ gilt, und indem man sodann die gesamte Lösung für diese beiden Bereiche getrennt durchführt. Übersichtlicher scheint es jedoch, den Ansatz (34), also nur Kreis- und keine Hyperbelfunktionen zu benutzen und die imaginären Werte in die Zahlenrechnung mitzunehmen. Dabei muß dann von den Formeln $\cos ix = \mathfrak{Cof} x, \sin ix = i \mathfrak{Sin} x$ Gebrauch gemacht werden. Wenn die Frequenzgleichung in der zuvor genannten Weise, also für die beiden Bereiche getrennt, zu lösen ist, so können auch auf dem zweiten Wege keine komplexen Ergebnisse entstehen, sondern entweder nur reelle oder nur imaginäre Zahlenwerte.

Über den Wert

$$k = \frac{1}{\alpha}, \tag{38}$$

dessen Einfluß auf die Größe n_3 soeben angegeben wurde, sind noch einige Bemerkungen zu machen.

Dieser Sonderwert nimmt auch in weiterer Hinsicht (vgl. Ziff. 8 und 10) die Stellung einer kritischen Zahl ein, so daß der Versuch gemacht werden mußte, festzustellen, ob er eine bestimmte physikalische Bedeutung hat.

Die Gleichung (38) wird erfüllt, wenn die Kreisfrequenz ω der Bogenschwingungen den von allen Randbedingungen (z. B. also auch vom Zentriwinkel φ_0) unabhängigen Wert

$$\omega = \sqrt{\frac{EF}{\mu r_0^2}} \tag{38a}$$

annimmt. Dadurch geht die Differentialgleichung (27) über in

$$\frac{d^6 \bar{w}}{d\vartheta^6} + 3 \frac{d^4 \bar{w}}{d\vartheta^4} - \left(\frac{r_0}{i_0}\right)^2 \frac{d^2 w}{d\vartheta^2} = 0.$$

Die äußere Form dieser neuen Differentialgleichung legt die Wahrscheinlichkeit nahe, daß durch (38a) ein Stabilitätsproblem¹ an dem im übrigen unbelasteten Bogenträger gekennzeichnet wird.

Für diese Vermutung spricht auch die Tatsache, daß mit

$$1 - \alpha k = 0$$

der Ausdruck β in (37), welcher bei u und N in (36) als Faktor auftritt, unendlich groß wird. [In der Anwendung auf den Zweigelenkbogen folgt daraus für u ein unbestimmter Wert, da die eckige Klammer von (36a) zu Null wird.]

Den erschöpfenden Aufschluß über diese Zusammenhänge würde wohl nur eine entsprechende Stabilitätsuntersuchung liefern können. Diese wird sehr verwickelt sein, denn sie müßte die Dehnbarkeit der Achse vollständig berücksichtigen und ihr müßte eine komplizierte Belastung zugrunde gelegt werden. In Frage käme wohl nur eine Belastung durch radiale und tangentielle Trägheitskräfte, wie sie im Schwingungszustand auftreten. [Diese sind proportional den Ausbiegungen, eine Eigenschaft, die sich durchaus mit Gleichung (38a) einerseits und den Gleichungen (16) für X und Z andererseits in Übereinstimmung befindet.]

Wegen ihrer Umständlichkeit ist vorläufig darauf verzichtet worden, eine derartige Untersuchung durchzuführen. Die Frage nach der physikalischen Deutung des Wertes (38) wird also offen gelassen. Entscheidend ist ja, daß die Auswirkungen, die dieser kritische Wert auf Schwingungszahl und Schwingungsform haben kann, hinreichend erkannt werden (vgl. dazu Ziff. 8 bis 10).

C. Anwendung auf den Zweigelenkbogen.

7. Frequenzgleichungen, Ordinatangleichungen. Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes sollen nun zur Schwingungsuntersuchung des beiderseits gelenkig gestützten Bogenträgers (Abb. 5) benutzt werden.

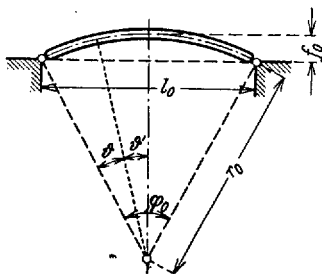


Abb. 5. Zweigelenkbogen.

setzt.

Die allgemeine Lösung (34) der Differentialgleichung (33), welche ausgeschrieben lautet

$$\bar{w} = A_1 \cos n_1 \vartheta + B_1 \sin n_1 \vartheta + A_2 \cos n_2 \vartheta + B_2 \sin n_2 \vartheta + A_3 \cos n_3 \vartheta + B_3 \sin n_3 \vartheta, \tag{39}$$

¹ Vgl. z. B. K. Federhofer, Eisenbau 12 (1921) S. 293 und die dort genannte Literatur.

$$\alpha = \left(\frac{i_0}{r_0}\right)^2 = 0$$

hat für den gegebenen Zweigelenkbogen zunächst die drei Randbedingungen zu erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vartheta = 0: \quad w &= 0 \quad (\text{Tangentialordinate}), \\ (b) \quad \vartheta = 0: \quad u &= 0 \quad (\text{Radialordinate}), \\ (c) \quad \vartheta = 0: \quad M &= 0 \quad (\text{Biegemoment}). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Unter Beachtung der Gleichungen (36a) und (36d) folgt daraus

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad A_1 + A_2 + A_3 &= 0, \\ (b) \quad n_1 a_1 B_1 + n_2 a_2 B_2 + n_3 a_3 B_3 &= 0, \\ (c) \quad n_1 b_1 B_1 + n_2 b_2 B_2 + n_3 b_3 B_3 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

dabei ist zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} a_x &= c_I + c_{III} n_x^2 - \alpha n_x^4, \\ b_x &= c_0 - c_{II} n_x^2 + \alpha n_x^4 \end{aligned} \right\} \quad (\kappa = 1, 2, 3) \quad (42)$$

eingeführt. Aus (41b) und (41c) folgt sofort, daß sich

$$\frac{B_1}{n_2 n_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2)} = \frac{B_2}{n_3 n_1 (a_3 b_1 - a_1 b_3)} = \frac{B_3}{n_1 n_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

verhält. Setzt man hier die Gleichungen (42) für a und b , sodann (37) für die c -Werte ein, so kann nach einiger Umrechnung und nach Heraus kürzen eines gemeinsamen Faktors

$$\frac{B_1}{e_1} = \frac{B_2}{e_2} = \frac{B_3}{e_3}$$

geschrieben werden, wenn man zur weiteren Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= n_2 n_3 (n_2^2 - n_3^2) [1 + \alpha (n_1^4 - k)], \\ e_2 &= n_3 n_1 (n_3^2 - n_1^2) [1 + \alpha (n_2^4 - k)], \\ e_3 &= n_1 n_2 (n_1^2 - n_2^2) [1 + \alpha (n_3^4 - k)] \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

eingführt. So ergibt sich schließlich

$$B_1 = e_1 C, \quad B_2 = e_2 C, \quad B_3 = e_3 C. \quad (44)$$

Darin ist C eine neue Konstante, welche von zeitlichen Bedingungen abhängig ist, also hier unbekannt bleiben darf.

In der weiteren Untersuchung sollen die Frequenzgleichungen und die Ordinaten-gleichungen für die symmetrischen und die gegensymmetrischen Schwingungen getrennt voneinander aufgestellt werden. Beide könnten natürlich in jeweils einer einzigen Gleichung zusammengefaßt werden, übersichtlicher ist jedoch die getrennte Untersuchung.

Die Begriffe „symmetrisch“ und „gegensymmetrisch“ sind in bezug auf die Radial-ordinate u gedacht. Dieser Hinweis geschieht deswegen, weil bei symmetrischen Schwingungen die Tangentialordinaten w gegensymmetrisch, bei gegensymmetrischen Schwingungen aber symmetrisch verteilt sind. Das ergibt sich daraus, daß u [vgl. (36a)] nur von ungeraden Ableitungen von w abhängig ist.

Zunächst seien die symmetrischen Schwingungen (vgl. z. B. Abb. 7 und 8 von Ziff. 9) betrachtet. Die Symmetriebedingungen, welche der Ansatz (39) erfüllen muß, lauten:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \vartheta = \frac{\varphi_0}{2}: \quad w &= 0 \quad (\text{Tangentialordinate}), \\ (b) \quad \vartheta = \frac{\varphi_0}{2}: \quad \psi &= 0 \quad (\text{Tangentenneigung}), \\ (c) \quad \vartheta = \frac{\varphi_0}{2}: \quad Q &= 0 \quad (\text{Querkraft}). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Setzt man in diese mit Hilfe von (36) den Wert \bar{w} aus (39) und seine Ableitungen nach ϑ ein, so ergibt sich, wenn wieder von der abgekürzten Schreibweise wie (42) Gebrauch gemacht wird,

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \left(A_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} \right) + \\
 & + \left(A_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} \right) + \left(A_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} \right) = 0, \\
 \text{(b)} \quad & b_1 \left(A_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} \right) + \\
 & + b_2 \left(A_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} \right) + b_3 \left(A_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} \right) = 0, \\
 \text{(c)} \quad & n_1^2 b_1 \left(A_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} \right) + \\
 & + n_2^2 b_2 \left(A_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} \right) + n_3^2 b_3 \left(A_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} \right) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Diese Gleichungen sind nur dann erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}
 A_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} &= 0, & A_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} &= 0, \\
 A_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} &= 0
 \end{aligned}$$

ist, d. h., wenn

$$A_1 = -B_1 \operatorname{tg} \frac{n_1 \varphi_0}{2}, \quad A_2 = -B_2 \operatorname{tg} \frac{n_2 \varphi_0}{2}, \quad A_3 = -B_3 \operatorname{tg} \frac{n_3 \varphi_0}{2} \quad (47)$$

Die gesuchte Frequenzgleichung für die symmetrischen Schwingungen erhält man jetzt sofort dadurch, daß man (47) und (44) in (41a) einsetzt:

$$e_1 \operatorname{tg} \frac{n_1 \varphi_0}{2} + e_2 \operatorname{tg} \frac{n_2 \varphi_0}{2} + e_3 \operatorname{tg} \frac{n_3 \varphi_0}{2} = 0. \quad (48)$$

Die zugehörige Gleichung für die radiale Schwingungsordinate u (bzw. deren zeitliches Maximum \bar{u}) ist ebenfalls schnell anzugeben. Allgemein ist nach (36a) und (39)

$$\bar{u} = \beta \left[n_1 a_1 (-A_1 \sin n_1 \vartheta + B_1 \cos n_1 \vartheta) + n_2 a_2 (-A_2 \sin n_2 \vartheta + B_2 \cos n_2 \vartheta) + n_3 a_3 (-A_3 \sin n_3 \vartheta + B_3 \cos n_3 \vartheta) \right], \quad (49)$$

worin unter a_1, a_2, a_3 wieder die Abkürzungen (42) verstanden sind. Ersetzt man die Konstanten A und B nach (47) und (44) durch eine einzige Konstante C , so folgt

$$\begin{aligned}
 \bar{u} = \beta C \left[n_1 a_1 e_1 \left(\operatorname{tg} \frac{n_1 \varphi_0}{2} \sin n_1 \vartheta + \cos n_1 \vartheta \right) + \right. \\
 \left. + n_2 a_2 e_2 \left(\operatorname{tg} \frac{n_2 \varphi_0}{2} \sin n_2 \vartheta + \cos n_2 \vartheta \right) + n_3 a_3 e_3 \left(\operatorname{tg} \frac{n_3 \varphi_0}{2} \sin n_3 \vartheta + \cos n_3 \vartheta \right) \right]
 \end{aligned}$$

oder, wenn man zur Festlegung eines beliebigen Bogenpunktes den Winkel

$$\vartheta' = \frac{\varphi_0}{2} - \vartheta,$$

also von der Symmetrieachse aus gerechnet, an Stelle des bisher benutzten Winkels ϑ gebraucht,

$$u = \cos \omega t \cdot C_0 \left(n_1 a_1 e_1 \frac{\cos n_1 \vartheta'}{\cos \frac{n_1 \varphi_0}{2}} + n_2 a_2 e_2 \frac{\cos n_2 \vartheta'}{\cos \frac{n_2 \varphi_0}{2}} + n_3 a_3 e_3 \frac{\cos n_3 \vartheta'}{\cos \frac{n_3 \varphi_0}{2}} \right). \quad (50)$$

Darin ist noch $C_0 = C\beta$ als zeitlich unveränderliche Konstante eingeführt. Die Symmetrieeigenschaften der durch Gleichung (50) beschriebenen Schwingungsform sind offensichtlich, da $\cos n\vartheta' = \cos(-n\vartheta')$ ist.

Um die entsprechende Untersuchung für die gegensymmetrischen Schwingungen (vgl. z. B. Abb. 9 von Ziff. 9) durchzuführen, sind die Bedingungen der Gegensymmetrie

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \vartheta = \frac{\varphi_0}{2} : \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0 \quad (\text{Maximum der Tangentialordinate}), \\
 \text{(b)} \quad & \vartheta = \frac{\varphi_0}{2} : u = 0 \quad (\text{Radialordinate}), \\
 \text{(c)} \quad & \vartheta = \frac{\varphi_0}{2} : \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (\text{Wendepunkt der elastischen Linie})
 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

an Stelle der Gleichungen (45) anzuwenden.

Statt (46) ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned} \text{(a)} \quad & n_1 \left(-A_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} \right) + \\ & + n_2 \left(-A_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} \right) + n_3 \left(-A_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} \right) = 0, \\ \text{(b)} \quad & n_1 a_1 \left(-A_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} \right) + \\ & + n_2 a_2 \left(-A_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} \right) + n_3 a_3 \left(-A_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} \right) = 0, \\ \text{(c)} \quad & n_1^3 a_1 \left(-A_1 \sin \frac{n_1 \varphi_0}{2} + B_1 \cos \frac{n_1 \varphi_0}{2} \right) + \\ & + n_2^3 a_2 \left(-A_2 \sin \frac{n_2 \varphi_0}{2} + B_2 \cos \frac{n_2 \varphi_0}{2} \right) + n_3^3 a_3 \left(-A_3 \sin \frac{n_3 \varphi_0}{2} + B_3 \cos \frac{n_3 \varphi_0}{2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Diese Bedingungen sind nur dann befriedigt, wenn die drei Klammerausdrücke

$$\left(-A \sin \frac{n \varphi_0}{2} + B \cos \frac{n \varphi_0}{2} \right) = 0$$

sind, also

$$A_1 = + B_1 \operatorname{ctg} \frac{n_1 \varphi_0}{2}, \quad A_2 = + B_2 \operatorname{ctg} \frac{n_2 \varphi_0}{2}, \quad A_3 = + B_3 \operatorname{ctg} \frac{n_3 \varphi_0}{2}. \quad (53)$$

Führt man anstatt (47) die Ausdrücke (53) zusammen mit (44) in (41a) ein, so erhält man die Frequenzgleichung der gegensymmetrischen Schwingungen:

$$e_1 \operatorname{ctg} \frac{n_1 \varphi_0}{2} + e_2 \operatorname{ctg} \frac{n_2 \varphi_0}{2} + e_3 \operatorname{ctg} \frac{n_3 \varphi_0}{2} = 0. \quad (54)$$

Die zugehörige Ordinatengleichung ergibt sich ähnlich, wie vorher die Gleichung (50) aus der Gleichung (49) entstand. Statt (47) ist jetzt (53) einzusetzen. Dann wird

$$u = \cos \omega t \cdot C_0 \left(n_1 a_1 e_1 \frac{\sin n_1 \vartheta'}{\sin \frac{n_1 \varphi_0}{2}} + n_2 a_2 e_2 \frac{\sin n_2 \vartheta'}{\sin \frac{n_2 \varphi_0}{2}} + n_3 a_3 e_3 \frac{\sin n_3 \vartheta'}{\sin \frac{n_3 \varphi_0}{2}} \right). \quad (55)$$

Die Eigenschaft der Gegensymmetrie geht hier aus der Tatsache, daß $\sin(-n\vartheta') = -\sin n\vartheta'$ ist, hervor.

8. Ergebnisse für verschiedene Bogenträger gleicher Krümmung. Durch die Anwendung und zahlenmäßige Auswertung der beiden Frequenzgleichungen (48) und (54) und der beiden Ordinatengleichungen (50) und (55) kann man jetzt eine Reihe von wichtigen Aufschlüssen gewinnen über das Verhalten des Zweigelenkbogens im Schwingungszustande.

Zunächst wurde die Untersuchung auf Bögen von gleicher Winkelöffnung, jedoch von verschiedenen Schlankheitsgraden beschränkt. Auf diese Weise kann die Abhängigkeit der Frequenz von der Dehnbarkeit der Bogenachse, welche ja durch die Größe α zum Ausdruck kommt, ermittelt werden. Als Winkel wurde

$$\varphi_0 = 0,9800 \text{ (etwa } 60^\circ)$$

gewählt, unter den verschiedenen Werten für $\alpha = \left(\frac{i_0}{r_0} \right)^2$ befand sich auch $\alpha = 0$, der Fall der nicht dehnbaren Stabachse.

Wie schon in Ziff. 3 angedeutet wurde, genügt die Festsetzung von α und φ_0 bereits, um die Größe k bestimmbar zu machen. Alle übrigen Abmessungen der zu untersuchenden Bogenträger können daher offen gelassen werden; sind auch sie gegeben, so kann ja mit Hilfe der Gleichung (25) von Ziff. 3

$$k = \frac{\mu r_0^4}{EJ} \omega^2$$

die gesuchte Schwingungszahl sofort angegeben werden. Mit anderen Worten: als Ergebnis der Schwingungsberechnung wird die Größe k bzw. die mit einer entsprechenden Systemkonstanten multiplizierte Kreisfrequenz ω angesehen.

Die zahlenmäßige Auflösung einer Frequenzgleichung geschah in der in Ziff. 4 angedeuteten Weise: aus (35) und (43) wurden zuerst für versuchsweise eingesetzte Werte k die Größen $n_1, n_2, n_3, e_1, e_2, e_3$ ermittelt, diese wurden sodann in

$$e_1 \operatorname{tg} \frac{n_1 \varphi_0}{2} + e_2 \operatorname{tg} \frac{n_2 \varphi_0}{2} + e_3 \operatorname{tg} \frac{n_3 \varphi_0}{2} = f_s(k)$$

bzw.

$$e_1 \operatorname{ctg} \frac{n_1 \varphi_0}{2} + e_2 \operatorname{ctg} \frac{n_2 \varphi_0}{2} + e_3 \operatorname{ctg} \frac{n_3 \varphi_0}{2} = f_G(k)$$

eingesetzt. Aus den so gefundenen Beträgen $f(k)$ wurde dann (wenn nötig unter Wiederholung des Rechnungsganges) auf diejenigen Größen k geschlossen, durch welche die Frequenzgleichung befriedigt wird.

Zur Erlangung vorläufiger Ergebnisse, die den endgültigen zum Teil sehr nahe kommen, kann man übrigens unter erheblicher Verkürzung der Rechnung

$$n_1^2 \approx \frac{3}{2} + \sqrt{k}, \quad n_2^2 \approx \frac{3}{2} - \sqrt{k}, \quad n_3^2 \approx \alpha k - 1 \quad (56)$$

als angenäherte Wurzeln der Hauptgleichung (35) einführen.

Die umfangreichen und langwierigen Zahlenrechnungen sollen hier nicht, auch nicht auszugsweise, wiedergegeben werden. Ihre Ergebnisse wurden in Abb. 6 aufgetragen, wobei jedoch nicht unmittelbar k als Funktion von α dargestellt wurde. Aus verschiedenen Gründen (vor allem zur Erleichterung des späteren Vergleiches mit Bögen von anderer Krümmung) wurden die äußeren Abmessungen des Bogens nicht mehr durch r_0 und φ_0 , sondern durch die Stützweite l_0 und die Pfeilhöhe f_0 wiedergegeben. Dementsprechend wurden der Schlankheitsgrad durch l_0/i_0 (anstatt durch α) und die gefundene Lösung durch $\omega \sqrt{\frac{\mu l_0^3}{EJ}}$ (anstatt durch k) ausgedrückt.

Zur Umrechnung dienen dabei die einfachen Beziehungen

$$\frac{l_0}{i_0} = 2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{\frac{I}{\alpha}},$$

$$\omega \sqrt{\frac{\mu l_0^3}{EJ}} = \left(2 \sin \frac{\varphi_0}{2}\right)^2 \sqrt{k}.$$

Der Winkel $\varphi_0 = 0,9800$ war schon so gewählt worden, daß $\frac{f_0}{l_0} = \frac{1}{8}$ ist.

Über die Bezeichnung der verschiedenen Kurven in Abb. 6 sei noch folgendes gesagt: Bei Bogenträgern kann, ähnlich wie bei Rahmensystemen, die Schwingungsform durch die Begriffe „Grundschwingung“, „erste Oberschwingung“ usw. nicht

eindeutig gekennzeichnet werden. Durch die in der Abbildung angewandten Benennungen mit getrennten Ordnungsnummern für Symmetrie und Gegensymmetrie ist eine klarere Unterscheidung möglich.

Die Lösungen für dehnungslose Achse sind, soweit sie sich nicht mit denen für dehnbare Achse decken, punktiert eingezeichnet. Unterhalb einer gewissen Grenze von l_0/i_0 sind die Kurven ohne praktische Bedeutung, weil dann nicht mehr von einem „dünnen Stabe“ die Rede sein kann, auf welchem die eindimensionale Theorie anwendbar ist. Wo die Kurven trotzdem weitergezeichnet wurden, geschah es, um den grundsätzlichen Verlauf der Abhängigkeit erkennbar zu machen.

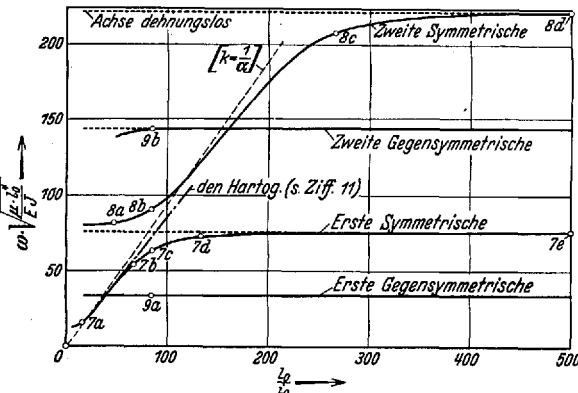


Abb. 6. Abhängigkeit der Frequenz vom Schlankheitsverhältnis für $f_0/l_0 = 1/8$.

Auf verschiedene wichtige Fragen kann aus Abb. 6 bereits die Antwort entnommen werden.

So gehen alle Kurven bei großen Werten von l_0/i_0 über in diejenigen Parallelen zur Abszissenachse, die sich aus der Annahme einer dehnungslosen Stabmittellinie ergeben. Es folgt also, daß diese Annahme bei sehr schlanken Stäben immer zu brauchbaren Ergebnissen führt.

Diese Feststellung gilt für gegensymmetrische Schwingungen in größerem Umfange als für symmetrische. Bei der niedrigsten Gegensymmetrischen ist die Abhängigkeit der Frequenz von der Schlankheit sogar so gering, daß sie in der Abbildung gar nicht zum Ausdruck kommt.

Wesentlich anders liegen die Dinge bei den symmetrischen Schwingungen. Hier lassen sich bei jeder Kurve drei Abschnitte unterscheiden (bei der „zweiten“ sind diese deutlicher zu erkennen als bei der „ersten“): bei niedrigen und hohen Abszissenwerten eine Unabhängigkeit der Schwingungszahl vom Schlankheitsverhältnis, zwischen beiden liegt jedoch ein Bereich starker Abhängigkeit. In diesem steigen die Frequenzen mit wachsendem l_0/i_0 so stark an, daß sogar in der Reihenfolge gegenüber den Frequenzen der gegensymmetrischen Schwingungen ein Wechsel eintritt. Vorher lag jede Symmetrische niedriger als die Gegensymmetrische mit gleicher Ordnungsnummer, nachher liegt sie aber höher.

Auch über die Grenzen, zwischen denen diese Umlagerung der Werte vor sich geht, kann eine Aussage gemacht werden: Sie werden gebildet von den Frequenzen der symmetrischen Schwingungen bei dehnungsloser Bogenachse, also den punktierten Parallelen der Abbildung. Die „zweite Dehnbare“ stimmt bei niedriger Schlankheit ungefähr mit der „ersten Dehnungslosen“, bei sehr schlanken Stäben dagegen mit der „zweiten Dehnungslosen“ überein.

Es läßt sich an Hand der Frequenzgleichung (48) genau verfolgen, wie dieses starke Ansteigen der Schwingungszahl entsteht. Es ist bedingt durch den kritischen Wert $k = 1/\alpha$, von dem am Schluß der Ziff. 6 die Rede war. Die Abb. 4 zeigte bereits, daß in der Nähe derjenigen k -Werte, die ungefähr gleich $1/\alpha$ sind, die Wurzel n_3 der Hauptgleichung stark von k abhängig ist, die übrigen beiden Wurzeln jedoch nicht. Bei wachsendem $1/\alpha$ ist also der dritte von den drei Summanden, aus denen Gleichung (48) besteht, starken Schwankungen unterworfen, sobald $k \approx 1/\alpha$ ist. Diese Verschiebung im Größenverhältnis der drei Summanden wirkt sich dahin aus, daß k größere Werte annehmen muß, damit die Frequenzgleichung erfüllt wird.

Der enge Zusammenhang zwischen der Beziehung $k = 1/\alpha$, die sich in der Auftragung als gerade Linie darstellt, und dem Anwachsen der Schwingungszahl ist ja in Abb. 6 deutlich wahrzunehmen.

9. Die zugehörigen Schwingungsformen. Die Beobachtungen an der Abb. 6 haben zu der naheliegenden Vermutung geführt, daß mit der Verlagerung der Frequenzen starke Änderungen der Schwingungsformen verbunden sind, eine Vermutung, welche durch die Abb. 7 und 8 bestätigt wird. In diesen beiden sind Schwingungsformen dargestellt, die mit Hilfe der Ordinatengleichung (50) für verschiedene Schlankheitsverhältnisse errechnet wurden. Die Ordinatenmaßstäbe sind verzerrt, aber natürlich unbekannt, da sie von zeitlichen Bedingungen abhängen.

Die den einzelnen Schwingungsformen entsprechenden Punkte der Abb. 6 sind in dieser durch die jeweils gleiche Nummer gekennzeichnet.

Es zeigt sich, daß die erste symmetrische Schwingung bei gedrungenen Stäben (kleinem l_0/i_0) eine solche ohne Zwischenknoten (Abb. 7a) ist, daß bei zunehmender Schlankheit sich in der Nähe der Stützelenke neue Schwingungsknoten einstellen (Abb. 7b und 7c), die immer höher wandern (Abb. 7d), bis sie für $l_0/i_0 = \infty$, also dehnungslose Bogenachse, ungefähr in den Drittelpunkten verbleiben (Abb. 7e).

Ähnliche Veränderungen der Schwingungsformen gehen bei den übrigen symmetrischen Schwingungen vor sich. Bei der „zweiten“ z. B., die bei geringer Schlankheit zwei Zwischenknoten hat (siehe die weitgehende Übereinstimmung der Abb. 7 e und 8 a), entstehen mit wachsendem l_0/i_0 zwei weitere (Abb. 8 b und 8 c), so daß schließlich der Bogen in fünf ungefähr gleiche Teile zerlegt wird (Abb. 8 d).

Der Vollständigkeit halber soll erwähnt werden, daß beim Übergang von Abb. 8 b zu Abb. 8 c unter Umständen, die noch nicht näher untersucht wurden, sich Schwingungsformen ohne Zwischenknoten, jedoch mit zwei Wendepunkten einstellen können.

Die bisher über symmetrische Schwingungen gemachten Feststellungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Ein gedrungener (d. h. wenig schlanker) Zweigelenkbogen schwingt mit ungefähr den gleichen Frequenzen und Schwingungsformen wie ein sehr schlanker. Eine Ausnahme bildet nur die Schwingung ohne Zwischenknoten, die bei schlanken Bögen ausfällt. Im übrigen können sich also, wenn auch unter um Eins verschiedenen Ordnungsnummern, die gleichen Schwingungszustände einstellen, gleichgültig, ob die Achse dehnungslos ist oder ob sich ihre Dehnungen vollkommen auswirken können.

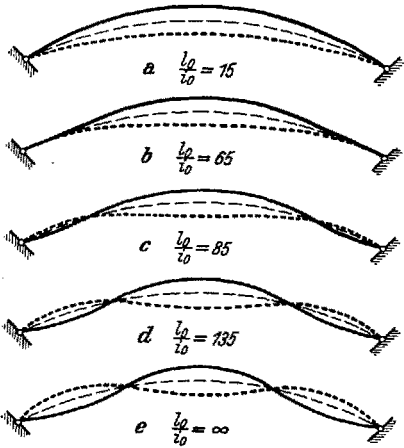


Abb. 7. Schwingungsformen der „ersten Symmetrischen“.

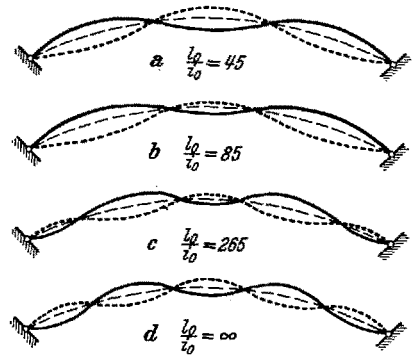


Abb. 8. Schwingungsformen der „zweiten Symmetrischen“.

Für Stäbe von mittlerer Schlankheit gibt es dagegen Frequenzen und Formen, die den Übergang zwischen je zwei der zuvor genannten bilden. Diese Zwischenzustände sind nur dadurch denkbar, daß die Stabachsdehnung nicht mehr voll wirksam ist. Das tritt ein in der Nähe des kritischen Wertes $k = 1/\alpha$.

Da die Grenzen der Schlankheit, zwischen denen diese Umlagerung stattfindet, sich mit der Ordnungsnummer der Schwingung ändern, kann ein und derselbe Bogen-träger (vgl. z. B. Abb. 7 c und 8 b, beide mit $l_0/i_0 = 85$) zwei verschiedene Schwingungszustände haben, die die gleiche Zahl von Schwingungsknoten besitzen.



Abb. 9. Gegensymmetrische Schwingungsformen.

Zum Vergleich mit dem bisher Genannten wurden in Abb. 9 gegensymmetrische Schwingungsformen mit Hilfe von (55) aufgetragen, für die sich praktisch kein Unterschied ergab, ob sie für $l_0/i_0 = 85$ oder für $l_0/i_0 = \infty$ angesetzt wurden.

Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß bei den allerniedrigsten Schlankheitsgraden ein Umstand eintritt, der weitere Verlagerungen der Frequenzen zur Folge hat. Diese treten bei den gegensymmetrischen Schwingungen eher ein als bei den symmetrischen. Bei der „zweiten Gegensymmetrischen“ ist dieser Einfluß in Abb. 6 bereits zu erkennen. Da jedoch für die niedrigen Frequenzen die fraglichen Schlankheitsgrade so gering sind, daß die Theorie des dünnen Stabes nicht mehr verwendbar ist, so wird auf die Erscheinung hier nicht näher eingegangen.

10. Ergebnisse für Bögen von verschiedener Krümmung. Um Vergleiche anzustellen über das Verhalten von Bogenträgern mit verschieden starken Krümmungen, wurden die der Abb. 6 entsprechenden Kurven auch für andere Pfeilverhältnisse ermittelt. Insgesamt wurden Bögen mit

- 1) $\frac{f_0}{l_0} = 0$ (gerader Stab),
- 2) $\frac{f_0}{l_0} = \frac{1}{16}$ ($\varphi_0 = 0,4974$; etwa 30°),
- 3) $\frac{f_0}{l_0} = \frac{1}{8}$ ($\varphi_0 = 0,9800$; etwa 60°),
- 4) $\frac{f_0}{l_0} = \frac{1}{5}$ ($\varphi_0 = 1,5220$; etwa 90°)

untersucht und die Ergebnisse in Abb. 10 dargestellt.

Die Frequenzen für den geraden Stab, welche ja von l_0/i_0 unabhängig sind, ergeben sich aus der bekannten Frequenzgleichung

$$\sin \left(l_0 \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EJ}} \right) = 0.$$

Man erhält Parallelen zur Abszissenachse in den Abständen

$$\omega \sqrt[4]{\frac{\mu l_0^4}{EJ}} = \pi^2, \\ (2\pi)^2, \quad (3\pi)^2 \text{ usw.},$$

die entsprechen abwechselnd symmetrischen und gegensymmetrischen Schwingungen.

Die Zahlenrechnungen wurden in gleicher Weise wie in Ziff. 8 beschrieben, durchgeführt. Wo es zulässig schien, wurden freilich nur die angenäherten Wurzeln (56) der Hauptgleichung benutzt.

Die Abbildung zeigt, daß normalerweise die stärkere Krümmung eine Erniedrigung der Frequenz zur Folge hat. Die Unterschiede sind jedoch nicht so stark innerhalb der betrachteten Krümmungsgrenzen, daß die zusammengehörenden Linien nicht leicht erkennbare Kurvenscharen bilden. In letztere fügen sich die dem geraden Stab entsprechenden Parallelen völlig sinngemäß ein.

Die bereits ausführlich geschilderte Umlagerung der symmetrischen Frequenzen zeigt sich auch bei den anderen Krümmungen, mit dem Unterschiede, daß sie verschieden steil vor sich geht. Die Beziehung $k = 1/\alpha$, auf die ja an sich der Zentriwinkel φ_0 keinen Einfluß hat, muß bei den hier gewählten Achsenbezeichnungen durch Geraden von verschiedenen Neigungen dargestellt werden.

Je flacher der Bogenträger, um so flacher ist die Gerade auch geneigt. Dadurch kommen erstens Überschneidungen innerhalb jeder Linienschar vor, so daß in dem Umlagerungsbereich nicht mehr der höhere Pfeil die tiefere Frequenz hat. Zweitens ergibt sich daraus, daß die Annahme einer dehnungslosen Achse um so eher gerechtfertigt ist, je stärker der Bogen gekrümmt ist. Schließlich bringt der Umstand, daß für $f_0/l_0 = 0$ die Gerade $k = 1/\alpha$ in die Abszissenachse fällt, also keine Verlagerung der Frequenz mehr stattfindet, wieder den sinngemäßen Übergang zum geraden Stabe.

11. Über die Verwendbarkeit der Näherungsverfahren. Angesichts des großen Aufwandes an Rechenarbeit, den die hier entwickelte Differentialgleichungsmethode zur

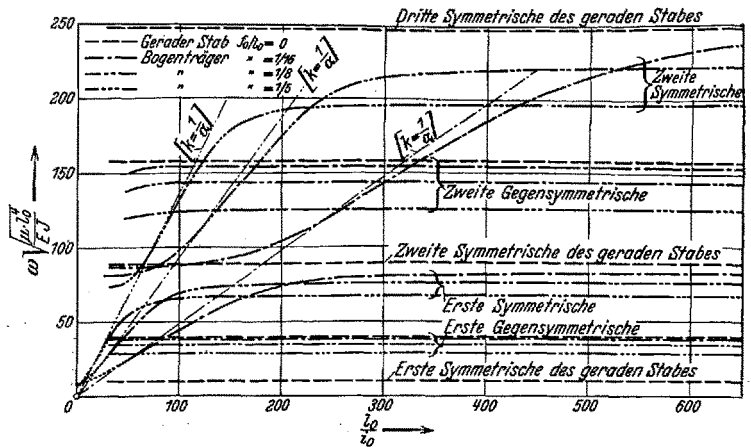


Abb. 10. Abhängigkeit der Frequenz vom Schlankheitsverhältnis für Bögen mit verschiedenen Pfeilverhältnissen.

Untersuchung von Bogenträgerschwingungen erfordert, ist es wahrscheinlich, daß für praktische Anwendungen dieses Verfahren nie oder nur im Notfalle benutzt werden wird. Etwas anderes ist es, wenn man sich ihrer, wie es in dieser Arbeit gedacht ist, sozusagen nur einmalig zur Klärung der grundsätzlichen Zusammenhänge bedient.

Für die Berechnungen der Praxis wird daher wohl stets das Bestreben bleiben, mit Hilfe von anderen Methoden, also etwa nach **Rayleigh** oder **Ritz**, zu brauchbaren Ergebnissen zu kommen. Aus diesem Grunde soll noch untersucht werden, wieweit dabei Aussicht auf Erfolg vorhanden ist.

Die Genauigkeit, mit welcher diese Energiemethoden arbeiten, ist ziemlich stark davon abhängig, daß man die Schwingungsform für die zu untersuchende Frequenz ungefähr kennt. Trifft das zu, so ist ein solches Näherungsverfahren der gegebene Weg.

Bei dehnungsloser Bogenachse bilden sich die Schwingungsformen ziemlich regelmäßig aus und sind daher leicht zu schätzen. Dementsprechend sind die Ergebnisse der Näherungsformeln sehr gut, insbesondere diejenigen für gegensymmetrische Schwingungen, die ja nach Ziff. 8 fast immer als dehnungslos angesehen werden können. Nach **Rayleigh** kann man für sie die Formel angeben

$$k = \frac{\mu r_0^4}{EJ} \omega^2 = \frac{(1 - \lambda^2)^2}{1 + \frac{3}{\lambda^2}}$$

mit $\lambda = \frac{2\pi}{\varphi_0}$ für die „erste“ und $\lambda = \frac{4\pi}{\varphi_0}$ für die „zweite Gegensymmetrische“.

Für die „erste Symmetrische“, die wegen der Dehnungslosigkeit der Achse zwei Zwischenknoten (Abb. 8a) hat, liefert

$$k = \frac{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - 1)^2 + \lambda_3^2 (\lambda_3^2 - 1)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + 2}$$

mit $\lambda_1 = \frac{\pi}{\varphi_0}$ und $\lambda_3 = \frac{3\pi}{\varphi_0}$ recht gute Ergebnisse, natürlich nur für sehr schlanke Stäbe.

Wegen des Weges, auf dem diese Formeln abgeleitet werden, sei auf die angegebene Literatur¹ verwiesen. Ihr Aufbau ist deshalb so einfach, weil die Bedingung (28) für die Undehnbarkeit der Achse

$$u = \frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

es ermöglicht, eine der beiden Schwingungsordinaten bequem zu eliminieren.

Ist die Bogenachse dehnbar, so sind es zwei verschiedene Umstände, welche der Lösung mit Hilfe der Energieverfahren Schwierigkeiten entgegensetzen. Erstens ist es bei den symmetrischen Schwingungen (diese werden ja praktisch nur betroffen) nicht immer leicht, die Schwingungsform einigermaßen genau zu schätzen. Das gilt insbesondere dann, wenn der Bogen ein solches Schlankheitsmaß besitzt, daß es in den in Ziff. 8 beschriebenen Verlagerungsbereich der Frequenzen fällt. Zweitens müssen die Näherungsansätze für u und w in einer der Wirklichkeit entsprechenden Abhängigkeit voneinander eingeführt werden. Genau genommen ist diese Abhängigkeit durch Gleichung (36a) gegeben, in ihr ist jedoch die unbekannte Kreisfrequenz (in Form von k) aufs neue enthalten, so daß eine Gleichung sehr hohen Grades entsteht, die einen vervielfachten Rechenaufwand erfordert.

Wenn eine von den beiden genannten Schwierigkeiten fortfällt, so ist es möglich, durch die im Ritzschen Verfahren ausgenutzte Minimumeigenschaft die zweite zu überwinden.

Tatsächlich gelingt es auf diesem Wege, für die niedrigste symmetrische Schwingung, solange sie ohne Zwischenknoten vor sich geht (die Schwingungsform also gut geschätzt werden kann), eine ausgezeichnete Näherungsformel zu gewinnen. **Den Hartog** und **Federhofer**² schalten die Gleichung (36a) durch die Anwendung des Ritzschen

¹ Vgl. z. B. die Fußnoten 8 und 9 von S. 430.

² Vgl. Fußnoten 8 und 9 von S. 430.

Gedankens aus und kommen zu einem Ergebnis, welches in der hier angewandten Bezeichnungweise

$$k = \left[\left(\frac{\pi}{\varphi_0} \right)^2 - 1 \right]^2 + 0,82 \frac{1}{\alpha}$$

lautet. Zum Zwecke des Vergleiches sind die daraus errechneten Frequenzwerte in die Abb. 6 als strichpunktierte Linie (nahezu eine Gerade) eingezeichnet.

Solange die Schwingungszahl niedriger ist als die der „ersten Gegensymmetrischen“, deckt sich die Linie mit der aus der Differentialgleichung berechneten völlig. Für diesen Bereich ist die Formel ja auch nur geschaffen. Die Abweichung beginnt, sobald die angesetzte Schwingungsform nicht mehr genau zutrifft, sobald also die neuen Zwischenknoten in der Nähe der Kämpferpunkte auftreten. Dann liegen die wirklichen Frequenzen entsprechend dem Charakter der Energiemethoden niedriger.

Insbesondere ist es mit Hilfe obiger Formel nicht möglich, den Übergang zur entsprechenden Schwingung bei undehnbarer Achse zu erfassen, d. h. das Abbiegen der in Abb. 6 und 10 gezeichneten Kurven in die Waagerechte. Die von **den Hartog** dargestellten Kurvenscharen sind daher alle nur ohne diese Gegenkrümmung ermittelt worden.

In kurzer Zusammenfassung kann also gesagt werden, daß die Energiemethoden für gegensymmetrische Schwingungen praktisch immer, für symmetrische nur bei sehr schlanken Bögen verwendbar sind. Außerdem kann nach **den Hartog** die erste symmetrische Schwingung immer dann erfaßt werden, wenn sie die niedrigste Frequenz besitzt.

12. Schlußbemerkung. Durch die in Abschnitt C der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen über die vier niedrigsten Schwingungszahlen und Schwingungsformen eines Kreisbogenträgers ist ein umfassender Überblick über sein Verhalten im Schwingungszustande möglich geworden. Die Ergebnisse beschränken sich zwar nur auf den Zweigelenkbogen, aber beim eingespannten Bogen dürfte der Sachverhalt grundsätzlich ähnlich sein.

Letzteres geht schon daraus hervor, daß die symmetrische Frequenzgleichung nicht weit von der Form (48) abweichen kann; denn die Symmetriebedingungen (45) und die daraus gefolgerten Beziehungen (47) bleiben auch jetzt gültig.

Handelt es sich nicht mehr um den Kreisbogen, so werden sich zweifellos die einzelnen Ergebnisse gegeneinander verschieben. Aber die Annahme scheint gerechtfertigt, daß keine wesentlich neuen Gesichtspunkte auftreten, vor allem dann nicht, wenn die Bogenachse sich nicht weit von der Form eines Kreisbogens entfernt.

(Eingegangen am 15. September 1934.)

Über den Zusammenhang von Strömungs- und Spannungsproblemen.

(Erste Abhandlung.)

Von **Udo Wegner** in Darmstadt.

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit soll der Zusammenhang zwischen Strömungs- und Spannungsproblemen aufgeklärt werden. Genauer formuliert, handelt es sich um die beiden Probleme:

1. Gegeben sei das Hauptspannungsnetz einer ebenen Spannungsaufgabe. Es wird gefragt, ob dieses Kurvensystem als Netz der Stromlinien und der zugehörigen Äquipotentiallinien einer Potentialströmung angesehen werden kann.