

第5章 構造振動学

棒の振動を縦振動，捩り振動，曲げ振動に分けて考える．

5.1 棒の縦振動と捩り振動

まっすぐな棒の縦振動の固有振動数 f [Hz] は

$$f = \frac{\lambda}{2\pi L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.3)$$

である．ただし， L [単位 m] は棒の長さ， E [単位 N / m²] は棒の材料の縦弾性係数（ヤング率） ρ [単位 Kg / m³] は棒の材料の単位体積当りの質量である． λ は境界条件と振動モードによって決まる無次元の定数で，表に与えられる．

また，まっすぐで一樣な円形または中空円形断面棒，あるいは十分に長くて曲げ捩りが無視できて，断面のせん断中心と重心が一致すれば，ねじり振動の固有振動数 f [Hz] は

$$f = \frac{\lambda}{2\pi L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_p}} \quad (5.4)$$

である．ただし， G [単位 N / m²] は棒の材料の横弾性係数， J は丸棒では極2次モーメント I_p [単位 m⁴] と同じであるが，一般断面の場合表のように異なって， GJ [単位 Kg m²] は捩り剛性と呼ばれる． ρ [単位 Kg / m³] は棒の材料の単位体積当りの質量である． λ は境界条件と振動モードによって決まる無次元の定数で，表に与えられる．

5.2 梁の曲げ振動

5.2.1 理論解

まず，一樣な梁の曲げ振動について考える．梁の方程式(2.8)は

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x) \quad (5.5)$$

であった．ここでは w は位置 x の関数であるとともに時間 t の関数でもあるので偏微分表示にしている．分布力として慣性力を考えると

$$p(x) = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

と置けばよい．よって梁の振動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.7)$$

となる．式(5.7)は

$$w(x, t) = e^{\lambda x} e^{i\omega t}$$

表 1 棒の縦振動とねじり振動の




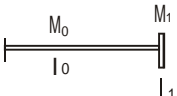
境界条件		
自由—自由		, 2 , 3 . . .
固定—固定		
固定—自由		$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$. . .
固定—質量 付着		$\cot \mu l_0 = \frac{M_1}{M_0}$ の根 $\mu = \frac{M_1}{M_0} \text{ または } \frac{l_1}{l_0}$ M ₀ は棒の全質量 l ₀ は軸まわりの慣性モーメント

表 2 断面定数

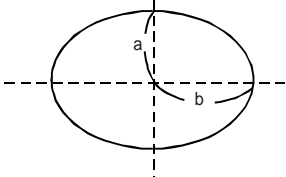
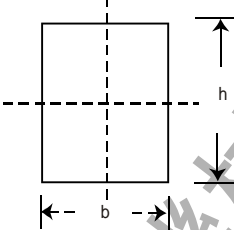
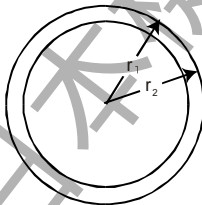
断面形状	I (水平軸まわり)	I _p	J
	$\frac{a^3 b}{4}$	$\frac{ab(a^2+b^2)}{4}$	$\frac{a^3 b^3}{(a^2+b^2)}$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{1}{12}(bh^3 + b^3h)$	$\frac{1}{3}b^3h \left[1 - \frac{192}{\pi} \frac{b}{h} \tanh\left(\frac{\pi h}{2b}\right) \right]$ (近似式)
	$\frac{1}{4}(r_1^4 - r_2^4)$ $= \frac{1}{4}(2r^2)(2r)t$ $= r^3 t$	$\frac{1}{2}(r_1^4 - r_2^4)$	$\frac{1}{2}(r_1^4 - r_2^4)$

図 5.1 棒の縦振動と捩りの

アルミ E = 7 × 10⁹ gram/cm²

= 2.7 gram/cm³

として変数分離法により解くことができ、その一般解は

$$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (5.8)$$

$$W(x) = C_1 \cosh \frac{\lambda x}{\ell} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{\ell} + C_3 \cos \frac{\lambda x}{\ell} + C_4 \sin \frac{\lambda x}{\ell} \quad (5.9)$$

で与えられる。ここに

$$\lambda^4 = \omega^2 \ell^4 \frac{\rho A}{EI} \quad (5.10)$$

従って振動数 f は

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (5.11)$$

となる。未定定数 C_1, C_2, C_3, C_4 は梁の両端の2個ずつの計4個の境界条件により決められ、その計算途中で λ の値も決定される。長さ1m、直径2cmのアルミの円断面梁について単位の例をとれば例えばSI単位系では

$$L = 1\text{m}, \quad A = 0.000314\text{m}^2, \quad E = 70\text{GPa} = 70 \times 10^9$$

$$\text{N/m}^2, \quad \rho = 2.8 \times 10^3 \text{Kg/m}^3, \quad I = 0.785 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

重力(工学)単位系では

$$L = 1000\text{mm}, \quad A = 314\text{mm}^2, \quad E = 7200\text{Kgf/mm}^2$$

$$\rho = (0.28\text{Kgf/mm}^3)(9800\text{mm/sec}^2) = 2.8 \times 10^{-3} \text{Kgf/mm}^2 \text{sec}^2$$

$$I = 0.785 \times 10^4$$

である。

例1：片持ち梁

まず、 $x=0$ で固定、 $x=\ell$ で自由の片持ちの場合を計算する。境界条件は

$$\text{固定：変位 } w=0, \quad \text{傾き } \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\text{自由：モーメント } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{剪断力 } \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$$

式(5.7)をこれらの条件式に代入して、固定条件から

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2$$

この条件を考慮して自由条件から

$$\begin{aligned} C_1(\cosh \lambda + \cos \lambda) + C_2(\sinh \lambda + \sin \lambda) &= 0 \\ C_1(\sinh \lambda - \sin \lambda) + C_2(\cosh \lambda + \cos \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

を得る． C_1 と C_2 とがゼロとならないための条件はその係数行列式がゼロであるから行列式を計算すると

$$\cosh \lambda \cos \lambda + 1 = 0 \quad (5.11)$$

となる．これは超越方程式で代数的に解けないので数値計算（たとえば Newton-Raphson 法）を行って


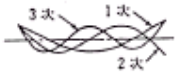

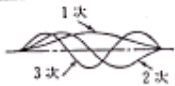

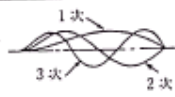

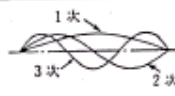
$$\lambda_1 = 1.875, \quad \lambda_2 = 4.694, \quad \lambda_3 = 7.855$$

を得る．よって固有振動数は式(5.10)によって与えられる．このときの変形は式(5.9)に λ の値を代入して

$$W_n = \cosh \frac{\lambda_n x}{l} - \cos \frac{\lambda_n x}{l} - Q \left(\sinh \frac{\lambda_n x}{l} - \sin \frac{\lambda_n x}{l} \right) \quad (5.12)$$

$$Q = \frac{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n}$$

となる．これを固有振動モードとよぶ．固有振動モードは振動している形を表すものでその絶対値（最大振幅値）は決められないことに注意されたい．固有振動モード図を図に示す．

境界条件	固有振動モード	λ
自由-自由 		4.730, 7.853, 10.996, ...
固定-固定 		3.927, 7.069, 10.210, ...
固定-単純支持 		$\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$
単純支持-単純支持 		1.875, 4.694, 7.855, ...

固有振動数と固有振動モードは数学的には固有値と固有ベクトルであるので直交性が成立する。
 ニュートン・ラフソン法(Newton-Raphson 法)
 この方法は一般の非線形方程式 $f(x)=0$ の強力な数値解法である。 $f(x)$ の微分 y

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

で定義されるので $f(x)=0$ より

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

となる。これを一般化して

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

として逐次計算に持ち込めばよい。
 計算法を具体的に示す。例えば(5.11)を解くと

$$f(\lambda) = \cosh \lambda \cos \lambda + 1$$

として初期値に $\lambda_1=1.5$ を採用すると

$$f(1.5)=1.1664$$

$$f'(1.5) = \frac{f(1.6) - f(1.4)}{1.6 - 1.4} = \frac{0.9247 - 1.3656}{0.2} = -2.2042$$

$$\lambda_2 = 1.5 + \frac{1.1664}{2.2042} = 2.029$$

同様に

$$f'(2.029) = \frac{f(2.030) - f(2.028)}{0.002} = \frac{7.0627 - 7.1652}{0.002}$$

と真値 1.875 に近づいてくる。
 この方法ではどの値に収束するかは初期値しだいである。

$$\lambda_3 = 2.029 - \frac{-0.71139}{5.1231} = 1.890$$

例2：両端単純支持梁

単純支持というのは変位は拘束して回転を許すので、モーメントがゼロとなって両端で単純支持：変位 $w=0$ ，モーメント $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ で、この条件を両端 $x=0$ ， l において課すと

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 \quad , \quad C_4 \sin \lambda = 0$$

となる。よって振動数を決める式は

$$\sin \lambda = 0$$

で

$$\lambda_1 = \pi = 3.141, \quad \lambda_2 = 2\pi = 6.283, \quad \lambda_3 = 3\pi = 9.424$$

であり，固有振動モードは

$$W_n = \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

となる．

例3：両端自由梁
結果のみを示すと

$$\lambda_1 = 4.730, \quad \lambda_2 = 7.853, \quad \lambda_3 = 10.996$$

である．

5.3 板の曲げ振動

板の曲げの基礎方程式は(4.7)式から

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q_z \quad (4.7)$$

であった．ここで分布力として慣性力を採用すると

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.13)$$

これを適当な境界条件の元に解けばよい．4辺単純支持の境界条件以外は（理論的な）厳密解は得られておらず，数値解析によることになる．

辺長が a, b の矩形板の固有振動数 f [Hz] は

$$f = \frac{\lambda \pi}{2a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (5.14)$$

ただし， a [m] は辺長， h [m] は板厚， D は板の曲げ剛性で $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ である．種々の境界条件での λ の値を表に示す．4辺単純支持の場合， n, m を正の整数として

$$\lambda = m^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 n^2 \quad (5.15)$$

である．

5.4 シェルの振動

円筒シェルの基礎方程式は式(4.30)において分布力を慣性力として

$$q_x = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q_\varphi = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad q_z = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

として

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{a \partial x \partial \varphi} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{D}{Ba^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{a^2 \partial \varphi} \right. \\ \left. - a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{a \partial x \partial \varphi^2} \right) - \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{a \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{ax^2} + \frac{\partial w}{a \partial \varphi} + \frac{D}{Ba^2} \left(\frac{3(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{ax^2} \right. \\ \left. - \frac{3-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) - \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a^2 \partial \varphi} + \frac{w}{a^2} + \frac{d}{Ba^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 u}{a \partial x \partial \varphi^2} - a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{3-\nu}{2} a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} \right. \\ \left. + a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{a^2 \partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \varphi^2} + \frac{w}{a^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.17c)$$

となる。シェルの厚さとしては第4章では t を採用していたが、時間に t を使う都合で h をシェル厚さとして採用している。

さて、軸対称であることを考慮して荷重(ここでは慣性力)が円周方向に正弦的に変化する場合、各変位もまた正弦的であるという性質を利用して式(4.39)と同じく

$$\begin{aligned} u(z, \theta) &= u_n(z) \cos n\theta \\ v(z, \theta) &= v_n(z) \sin n\theta \\ w(z, \theta) &= w_n(z) \cos n\theta \end{aligned} \quad (5.18)$$

として解を求めてみる。 n は円周方向波数である。数値的には厳密解が得られてたとえば表のように計算される。ここに

$$f = \frac{\lambda}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (5.19)$$

円周方向波数 n が大きい ($n > 3$) の場合の両端単純支持の場合の近似式として

$$f = \frac{1}{2\pi R^2} \sqrt{(n^2 + \kappa^2)^2 + \frac{4\alpha^4 \kappa^4}{n^2 + \kappa^2}} \frac{D}{\rho h} \quad (5.20)$$

がある。ただし $4\alpha^4 = 12(1-\nu^2)(R/h)^2$, $\kappa = m\pi R/L$ で m は軸方向の変形の波数で振動モードは

$$w_n(z) = \sin\left(\frac{m\pi Rz}{L}\right) \quad (5.21)$$

で与えられる .

一般にシェルの場合 , 円周方向波数 n が小さいほど振動数が低いわけではなく , 薄いシェルであるほど最低固有振動数を与える n が大きくなる .

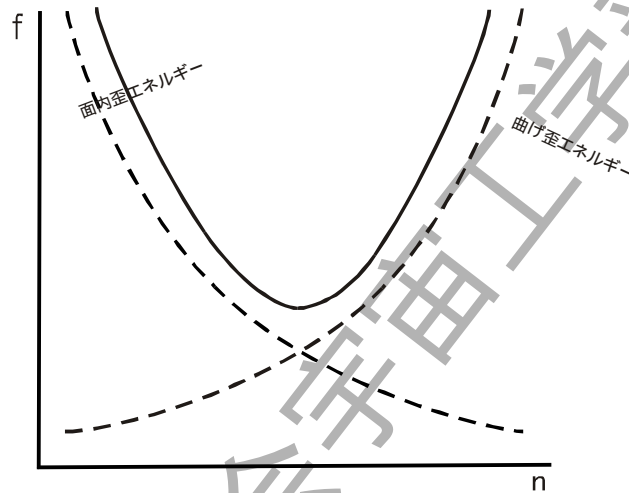


図 5 . 5 : 円筒シェルの固有振動数と円周方向波数

これは n が小さいと面内歪エネルギーが支配的であり , n が大きいと曲げ歪エネルギーが支配的となり , その両者の和の一番小さい n で最低固有振動数となるのである .

参考文献

- [5.1] . 小林繁夫 : 振動学 , 丸善
構造振動についても記述した大学院向けの教科書
- [5.2] . A.W.Leissa:Vibration of Plates, NASA SP-160 (1969)
板の振動のモノグラフ , これから多くの原論文を見つけることができる .
- [5.3] . A.W.Leissa:Vibration of Shells,NASA SP-288 (1973)
円筒以外にも詳しいモノグラフ
- [5.4] . 古賀達蔵 , 小松敬治 : 円筒殻の自由振動における支配方程式と固有値 , 日本機会学会論文集 46-1 (1980) pp.70-79 Donnel, Flugge, Novozhilov, Love, Goldenveizer, Sanders などの円筒殻理論を厳密に解いて解の精度比較がしてある .