

# 集成材梁の横ねじれ座屈耐荷力

環境構造工学講座 03145 千田 知弘  
指導教官 薄木 征三 後藤 文彦

## 1. はじめに

近年は、集成材を鋼板やPC鋼棒などで補強したハイブリット型の構造を用いることで比較的長スパンの小・中規模の道路橋へと集成材の利用範囲が広がってきていることもあり、環境や景観への配慮、ランドマーク性など、様々な面から集成材木橋が見直されてきている。それに伴い、様々な条件で用いられる集成材部材（スレンダーなものや長スパンのもの）の供用中のものはもちろん、架設時における横ねじれ座屈も含めた力学特性や耐荷力特性を知ることの重要性が増してきている。

集成材の力学特性を調べるための様々な実験は行われているが、実験には条件設定や規模、経済上・時間上の制約があるので、数値的な解析手法も確立されることが望まれる。しかし、集成材を数値モデル化するには、いくつかの困難があり、なかなか鋼構造の数値モデル化のようにノウハウが蓄積されていない状況である。集成材は、製材に比べれば材料特性のばらつきは小さいが、それでも一定のばらつきを持つ直交異方性材料であり、引張に対しては破断までほぼ線形、圧縮側には塑性域があり、曲げを受けた場合のせん断変形は無視できないほどには大きい。こうした特性を、梁要素などの近似を行わずに、ソリッド要素などでまともにモデル化して解析することは、線形解析や低次非線形解析のレベルでなら、現段階でも十分に可能かも知れないが、大変位を伴う幾何学非線形も、弾塑性を伴う材料非線形も同時に考慮しなければならない高次の複合非線形問題では、コンピューターや汎用ソフトの飛躍的に進歩した現在においても、まだ多くの困難を伴う。そこで本研究では、鋼構造の分野では既に非線形解析のノウハウの確立している梁要素を用いた有限変位・有限要素法の定式化を拡張して、集成材梁の耐荷力解析を試みる。具体的には、幾何学非線形を考慮した剛性方程式に集成材の弾塑性性状をファイバーモデルで考慮し、せん断変形をティモシェンコ梁で考慮する。解析解の存在する弾性横ねじれ座屈の問題を解析して本定式化の精度を確認した後、実験が試みられた集成材梁モデルに対する横ねじれ座屈の問題を試算し、解析値と実験値の関係について考察する。

## 2. 解析手法

文献<sup>1)</sup>の有限変位・有限要素法では、次式のような剛性方程式を導いている。

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{T}^T \mathbf{r} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{f}$  は節点力ベクトル、 $\mathbf{R}$  は回転と変形を表す行列、 $\mathbf{K}$  は微小変位理論の線形剛性行列、 $\mathbf{T}$  は座標変換行列、 $\mathbf{r}$  は節点相対変位ベクトルで  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{r}$  は節点変位ベクトル  $\mathbf{d}$  の関数として与えられる。本研究では、この  $\mathbf{K}$  を、梁の2軸曲げ2方向のせん断変形に対してそれぞれせん断補正係数で考慮した3次元ティモシェンコ梁理論の剛性行列に置き換え、接線剛性行列の固有値を調べる<sup>1)</sup>ことで座屈判定する。ここでいう接線剛性方程式は、式1の節点変位ベクトル  $\mathbf{d}$  に関する増分を取るとことで、次式のように与えられる。

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{d} \quad (2)$$

ここに  $\mathbf{K}_1$  は接線剛性行列である。尚、材料定数は松などの接線方向のヤング率と面内の曲げに対するせん断弾性係数などを参考にして、ヤング率  $E = 10.0\text{GPa}$ 、せん断弾性係数  $G = 0.7\text{GPa}$  とし、せん断補正係数  $k$  は、

$$k = \frac{10E}{11E + 2G} \quad (3)$$

の関係<sup>1)</sup>から与える。ちなみに、 $E$  と  $G$  から等方性材料としてポアソン比を計算すると1を越えるが、本解析ではポアソン比は使われない。梁断面を分割したファイバー要素の軸方向応力のみで降伏判定を行い、応力

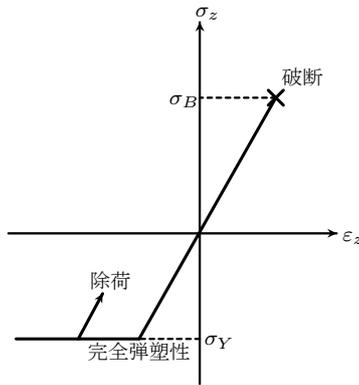


図-1 軸方向応力-軸方向ひずみ関係

ひずみ関係は、図-1のように圧縮側は降伏圧縮応力  $\sigma_Y$  の完全弾塑性（除荷は弾性）とし、引張側はいずれかの要素が破断応力  $\sigma_B$  に達した時点で限界荷重に達したと判定する。

### 3. 数値計算

#### (1) 等曲げを受ける直線梁の横ねじれ座屈

まず、横ねじれ座屈の解析解<sup>2),3)</sup>が存在する、等曲げを受ける直線梁の問題を弾性域で計算してみる。尚、等曲げを受ける直線梁はせん断変形を生じない。

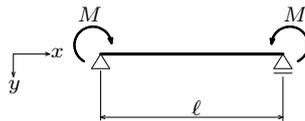


図-2 解析モデル

Vacharajittiphan ら<sup>3)</sup>の解析解  $M_{cr}^V$  は次式で与えられる。

$$M_{cr}^V = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{GJ \ell^2}\right)}{\left(1 - \frac{EI_y}{EI_x}\right) \left(1 - \frac{GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{\ell^2}}{EI_x}\right)}} \quad (4)$$

この式は、座屈前の面内たわみの影響が考慮された座屈公式であるが、式中の面内剛性を  $EI_x \rightarrow \infty$  とすると、根号の中の分母が消えてティモシェンコとギア<sup>2)</sup>による面内たわみを無視した座屈公式になる。さて、数値計算による座屈の判定は、式(2)における接線剛性行列  $\mathbf{K}_1$  の負の固有値の数が、0個から1個に変化した荷重段階を座屈荷重とする。ヤング率は、マツなどの集成材の軸方向ヤング率のおよその値として、 $E = 10.0 \text{ GPa}$ 、せん断弾性係数は、軸に平行な二面のせん断変形に対するせん断弾性係数のおよその値として、 $G = 0.7 \text{ GPa}$  とする<sup>4)</sup>。断面は、等曲げを受ける集成材梁の横ねじれ座屈の実験例<sup>5)</sup>に合わせて、桁幅  $b = 3 \text{ cm}$ 、桁高  $h = 24 \text{ cm}$  とする。梁の軸長  $\ell = 4 \text{ m}$  の場合の数値解を  $M_{cr}^V$  で除した比率を要素数  $n = 2 \sim 128$  に対して、表-1 に示す。数値解は、式(2)を用いて通常の弧長増分法で解いた場合、式(1)を用いずに式(2)の荷重増分  $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の  $1/1000$  で与えた場合、 $1/100$  で与えた場合を併記する。

表-1 収束性 ( $l = 4m$ )

要素数	式 (1)	$\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{1000}$	$\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{100}$
2	1.355	1.356	1.357
4	1.076	1.077	1.079
8	1.015	1.016	1.020
16	1.001	1.001	1.000
32	0.997	0.997	1.000
64	0.996	0.997	1.000
128	0.996	0.996	1.000

式 (1) を用いた通常の弧長増分法による数値解は、Vacharajittiphan ら<sup>3)</sup>の解析解よりも 0.4%ほど低めの解に収束している。式 (1) を用いずに式 (2) の荷重増分  $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の 1/1000 で与えた場合の数値解の収束値は、式 (1) を用いた通常の弧長増分法による数値解の収束値とこの精度では一致する。式 (2) の荷重増分  $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の 1/100 と粗く与えた場合の数値解は、1/1000 で与えた場合よりも約 0.4% 高めの解に収束している (たまたま  $M_{cr}^V$  と一致するが)。この問題に関しては、有効数字 3 桁の精度を得るには、64 要素で十分である。以後の解析はすべて 64 要素の結果である。梁の軸長を 1m から 4m まで変化させた解析結果を表-2 に示す。Vacharajittiphan ら<sup>3)</sup>の解析解  $M_{cr}^V$  については、その面内剛性を無限大にして面内たわみの影響を無視した解 (ティモシェンコとギアーによる解<sup>2)</sup>) も併記する。式 (1) を用いて通常の弧長増分法で解いた数値解については、その面内剛性を極端に大きく ( $10^6$  倍) して面内たわみの影響を無視した解、せん断補正係数  $k$  を極端に大きく ( $10^{10}$  倍) してせん断変形の影響を無視した解を併記する。式 (1) を用いずに式 (2) の荷重増分  $\Delta f$  を与えた数値解については、 $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の 1/1000 で与えた場合、1/100 で与えた場合を併記する。

表-2 等曲げを受ける直線梁の横ねじれ座屈

$\frac{M_{cr}^V \ell}{EI_y} \ell(m)$	1	2	3	4
$M_{cr}^V$	1.745	1.646	1.627	1.620
$I_x \rightarrow \infty$	1.727	1.629	1.611	1.604
式 (1)	1.737	1.639	1.621	1.614
$I_x \rightarrow \infty$	1.728	1.630	1.611	1.605
$k \rightarrow \infty$	1.737	1.639	1.621	1.614
式 (2) $\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{100}$	1.762	1.646	1.627	1.620
$\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{1000}$	1.746	1.642	1.622	1.615
文献 <sup>5)</sup> の実験	-	1.830	1.866	1.916

式 (1) を用いた数値解は、Vacharajittiphan ら<sup>3)</sup>の解析解  $M_{cr}^V$  より誤差 1%以内でやや低めの解を与え、面内剛性を無限大にした解も  $M_{cr}^V$  で面内剛性を無限大にした解とほぼ一致する。せん断補正係数を無限大としても、座屈解には差が現れない。ちなみに  $l=1m$  ( $\ell/\sqrt{I_y/A}=113$ ) のときの座屈点のたわみは、通常のせん断補正係数を用いて解いた場合も、せん断補正係数を無限大とした場合も 3.393mm となり、4 桁まで一致する。これは等曲げ問題ではせん断変形の影響がほとんど現れていないためと考えられる。式 (2) を用いて荷重増分を累積させて解いた数値解は、式 (1) を用いた数値解よりもやや高めの解を与える。荷重増分を  $M_{cr}^V$  の 1/1000 とした場合は、式 (1) を用いた数値解に対する誤差は約 0.5 ~ 0.1%以内であるが、荷重増分を  $M_{cr}^V$  の 1/100 とした場合は、約 1.4 ~ 0.4%以内とやや誤差が大きくなる。その結果、 $l=2\sim 4m$  では、たまたま  $M_{cr}^V$  と一致している。材料定数などが違うので単純な比較はできないが、文献<sup>5)</sup>の実験値の平均値は梁の軸長が長くなるほど、梁の軸長と面外曲げ剛性で無次元化した座屈荷重  $\frac{M_{cr}^V \ell}{EI_y}$  は小さくなっている。これについては次節で考察する。

## (2) 片持ち梁の横ねじれ座屈

小野ら<sup>7)</sup>が横ねじれ座屈の実験を行った片持ち梁のモデルに対して、弾塑性解析を試みる。幅 5cm × 高さ 25cm とし、集成材の圧縮降伏応力  $\sigma_Y$  と引張破断応力  $\sigma_B$  は、文献<sup>1)</sup>などを参考にして、 $\sigma_Y = -20\text{MPa}$ ,  $\sigma_B$

=40MPa とし、その他の弾性係数は前節と同様とする。

片持ち梁の横ねじれ座屈に対しては解析解は導かれていないが、Trahair<sup>6)</sup>が次式のような座屈公式を提案している。

$$P_{cr}^T = \frac{\sqrt{E_y I_y G J}}{\ell^2} \left( 3.95 + 3.52 \sqrt{\frac{\pi^2 E I_\omega}{G J \ell^2}} \right) \quad (5)$$

式中に面内剛性  $E I_x$  の項がないことから分かるように、この式は座屈前の面内たわみの影響は考慮していない。

なお、弾塑性解析に当たっては、座屈荷重の数千分の一程度の荷重増分を累積させて解いているが、弾性域において、弾性解析で得られる弾性解と誤差を生じる。荷重増分  $\Delta f$  を、 $\frac{P_{cr}^T}{3000}$ 、 $\frac{P_{cr}^T}{5000}$ 、 $\frac{P_{cr}^T}{7000}$ 、 $\frac{P_{cr}^T}{8000}$  として弾塑性解析を行った場合の弾性解と、弾性解析で得られた弾性解を図3に示す。 $\frac{P_{cr}^T}{8000}$  までは荷重増分が小さいほど、弾性解に近づいていくが、 $\frac{P_{cr}^T}{8000}$  を越えると逆に遠ざかる傾向を示すので、 $\frac{P_{cr}^T}{9000}$  以下は図に示していない。図3より、弾塑性解析の弾性域の値と、弾性解析の解がもっとも近いと思われる  $\frac{P_{cr}^T}{8000}$  の荷重増分で弾塑性解析を行うこととする。

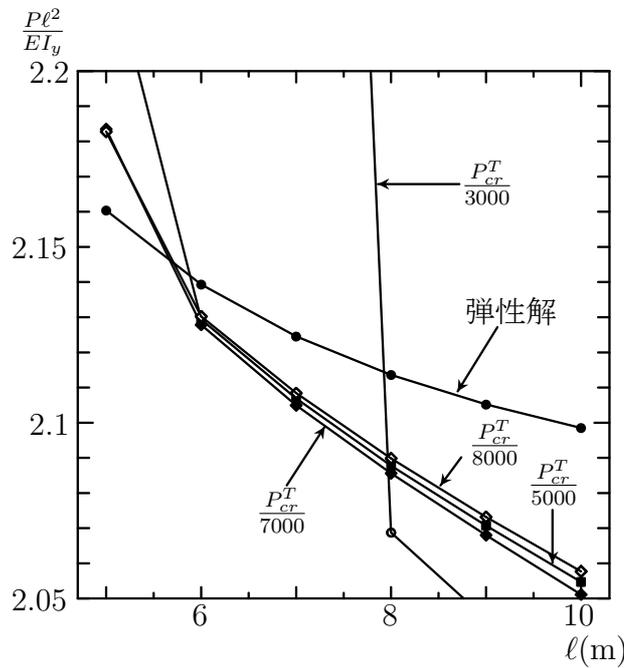


図-3 弾性域における各弾塑性解析値と弾性解析の解析値

さて、梁の軸長  $\ell$  を 2m~10m まで変化させて解析した結果を図-4に示す。弾性解を実線で、弾塑性解析の結果を黒丸で示す。

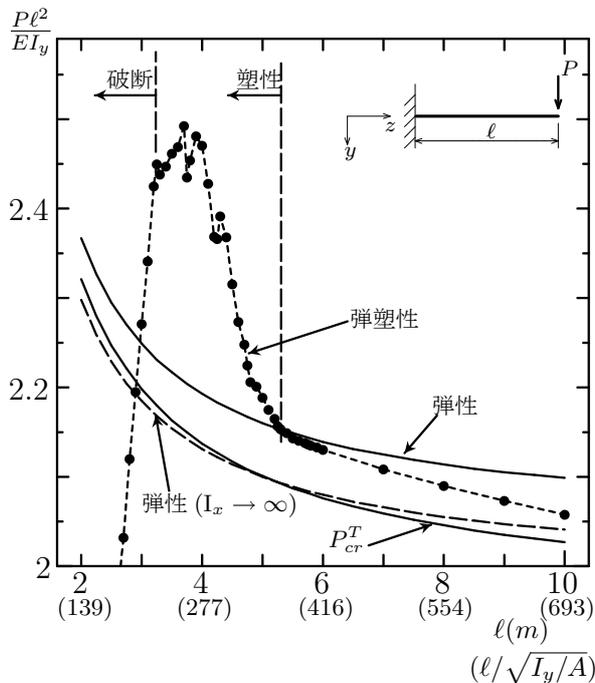


図-4 片持ち梁の横ねじれ座屈

通常の面内剛性で解析した結果は、面内剛性を無限大とした結果よりも約 2.5%ほど高い値を示すが、この差が、座屈前の面内たわみの影響と考えられる。本解析解は、 $l \geq 5.5\text{m}$  では弾性域で座屈し、 $l$  が大きいほど弾性解よりも低めの解が得られている。 $l \leq 5.4\text{m}$  では、軸圧縮応力が大きくなる固定端側の下部からファイバー要素が塑性化し始め、断面の剛性が低くなるためにたわみやすい梁となるため、座屈前の面内たわみも大きくなり、座屈荷重が弾性解よりも高くなるものと考えられる。但し、 $l$  の増加に対して、座屈荷重が単調には減少せずにギザギザと乱れが入っている。この乱れは荷重増分を粗くするほど大きくなる傾向がある。 $l \leq 3.2\text{m}$  では、固定端部引張側の破断で破壊する。

小野らの文献<sup>7)</sup>のグラフ中からおよその値が読み取れる  $l=3\text{m}$ ,  $3.5\text{m}$ ,  $4.5\text{m}$  の実験値を小野らの材料定数の測定値で  $P_{cr}l^2/EI_y$  と無次元化してみると、それぞれ、1.6, 1.8, 1.9 となり、 $l$  が大きくなるほど無次元化座屈荷重が大きくなっており、解析値とは逆の傾向を示す。ちなみにこれらの実験値は、小野らの材料定数の測定値を用いて計算した Trahair の解  $P_{cr}^T$  よりも 20%前後低めの値ではないかと思われる。

山本ら<sup>8)</sup>の行った木材の片持ち梁に対する横ねじれ座屈の実験で、梁の軸長  $l$  を同じ断面と断面定数で比較できるデータを以下に示す。

表-3 山本らの実験値

$E(\text{GPa})$	$G(\text{GPa})$	$l(\text{cm})$	$\frac{l}{\sqrt{I_y/A}}$	$\frac{P_{cr}^T l^2}{EI_y}$	$\frac{(\text{実験値})l^2}{EI_y}$
14.4	0.83	30	1350	1.679	1.241
14.4	0.83	50	2249	1.639	1.490
11.1	1.02	70	2055	2.299	2.021
11.1	1.02	110	3229	2.245	2.296

これは細長比  $l/\sqrt{I_y/A}$  がかなり大きめの木材梁での実験であるが、2種の材料定数の梁について、無次元化した Trahair の解 ( $\frac{P_{cr}^T l^2}{EI_y}$ ) は細長比 ( $l/\sqrt{I_y/A}$ ) の大きい方が小さくなるのに対し、無次元化した実験値 ( $\frac{(\text{実験値})l^2}{EI_y}$ ) は細長比 ( $l/\sqrt{I_y/A}$ ) の大きい方が大きくなっている。

#### 4. まとめ

梁要素に対する有限変位・有限要素法の定式化を拡張して、集成材梁の座屈耐荷力の解析を試みた。解析解の存在する等曲げを受ける単純支持梁の横ねじれ座屈の問題に関しては、本数値解は解析解とよく一致した。実験例の存在する片持ち梁の横ねじれ座屈の問題に関しては、塑性化による断面剛性の低下の生じる領

域で、本数値解は座屈前の面内たわみの影響を大きく評価しているようであるが、数値誤差による乱れのようなものが認められた。今回の解析の結果、面外曲げ剛性と梁の軸長で無次元化した座屈荷重が、解析値では細長比が大きいかほど小さくなるのに対して、実験値では逆に大きくなる傾向が複数の実験例から認められたが、この理由については、今後、解析と実験の両面から考察を続けたい。

#### 参考文献

- 1) 千田知弘, 後藤文彦, 長谷部薫, 薄木征三: 集成材梁の横ねじれ座屈耐荷力, 構造工学論文集, Vol.51A, 2005 (掲載予定)
- 2) チモシェンコ・ギアー著, 長谷川 節 訳: 弾性安定の理論上, ブレイン図書出版株式会社, 1974.
- 3) Vacharajittiphan, P., Woolcock, S. T. and Trahair, N. S.: Effect of in-plane deformation on lateral buckling, J. Struct. Mech., ASCE, Vol.3, No.1, pp.29-60, 1974.
- 4) 後藤文彦, 麓 貴行, 薄木征三, 佐々木貴信: 曲げ試験による木材梁せん断弾性係数推定の精度, 構造工学論文集, Vol.49A, pp.875-880, 2003.
- 5) 長谷部薫・薄木征三: 集成木材はりの横座屈解析と実験, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp.963-970, 1992.
- 6) Trahair, N. S.: Flexural-Torsional buckling of structures, E & FN Spon, Chapman and Hall, London, England. 1993.
- 7) 小野 徹郎, 井戸田 秀樹, 加藤 征宏: 集成材はりの横座屈耐力に関する考察, 日本建築学会構造系論文集 第 547 号, pp.121-128, 2001.
- 8) 山本 宏, 松本 勝彦: 木質梁の横安定性について (第 1 報), 北海道林産試験場研究報告, 第 62 号, pp.1-29, 1974.