等分布荷重を受けるティモシェンコ梁解について

環境構造工学講座　7510730　大道一馬
指導教員　後藤文彦

1. はじめに

せん断変形を考慮した等分布荷重ティモシェンコ梁のたわみを求める際に、微分方程式を用いた境界値問題による解法と単位荷重法による解法とではせん断たわみ項に違いが生じる。そこで有限要素を用いて解析し、境界値問題による解法を用いて計算した値と単位荷重法を用いて計算した値とでどちらの値に近づくのかを検討してみる。今回は、片持ち梁等分布荷重、片持ち梁三角形等分布荷重、単純梁等分布荷重について検討する。

2. 計算結果

片持ち梁等分布荷重

$$\delta_{境} = \frac{q\ell^4}{8EI} + \frac{q\ell^2}{kGA} \tag{1}$$

$$\delta_{単} = \frac{q\ell^4}{8EI} + \frac{q\ell^2}{2kGA} \tag{2}$$

片持ち梁三角形等分布荷重

$$\delta_{境} = \frac{q\ell^4}{30EI} + \frac{q\ell^2}{2kGA} \tag{3}$$

$$\delta_{単} = \frac{q\ell^4}{30EI} + \frac{q\ell^2}{6kGA} \tag{4}$$

単純梁等分布荷重

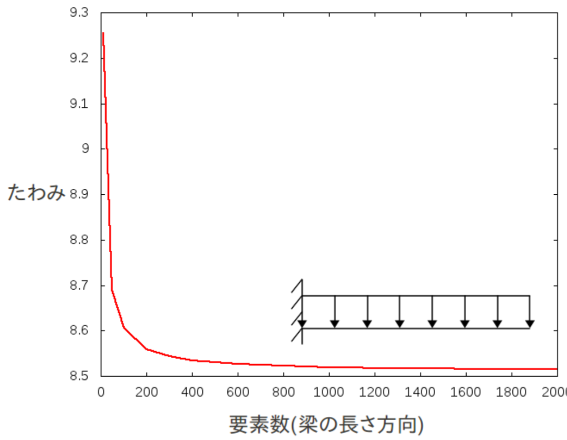
$$\delta_{境} = \frac{5q\ell^4}{384EI} \tag{5}$$

$$\delta_{単} = \frac{5q\ell^4}{384EI} + \frac{q\ell^2}{8kGA} \tag{6}$$

ここに、δ はたわみ、q は荷重、ℓ は梁の長さ、E はヤング率、I は断面二次モーメント、k はせん断補正係数、G はせん断弾性係数、A は断面積とする。

3. 解析方法

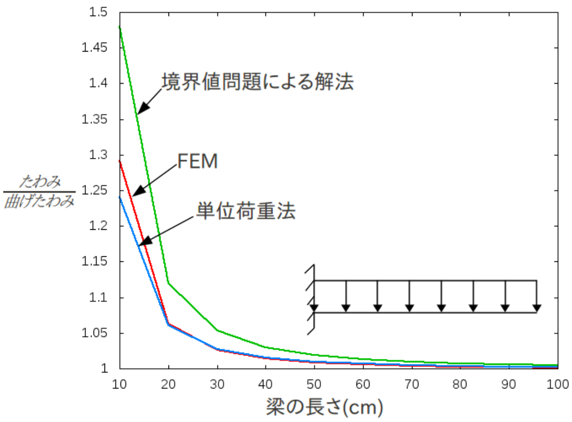
解析は有限要素解ツールの Calculix で行い、対象とする構造は、2cm × 2cm の正方形断面と 5cm × 2cm、2cm × 5cm、0.2cm × 5cm の長方形断面について、梁の長さを 10cm〜100cm まで 10cm 間隔で変化させてたわみを調べる。また、要素分割数は片持ち梁等分布荷重と片持ち梁三角形等分布荷重で 6(桁幅方向) × 10(桁高方向) × 2000(梁の長さ方向)、単純梁等分布荷重で 6(桁幅方向) × 10(桁高方向) × 1000(梁の長さ方向) として収束性を確認して十分に細かい要素数を用いてたわみを計算する。材料は木材 (荷重 q=1000N、ヤング率 E=5.690GPa, せん断補正係数 $k = \frac{5}{6}$、せん断弾性係数 $G = \frac{E}{15}$=0.379GPa) とする。



図–1 たわみ-要素数 (梁の長さ方向)　(5cm × 2cm 断面)

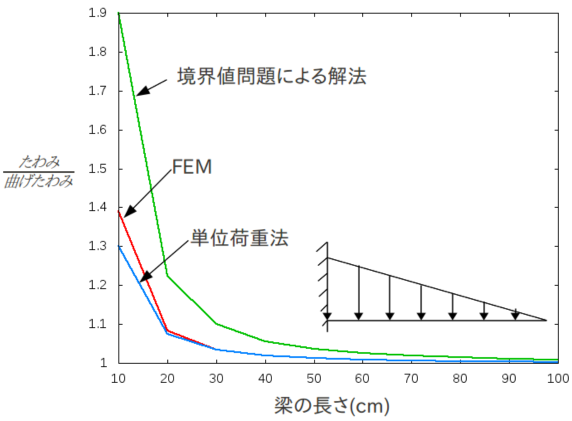
4. 解析結果

$\frac{たわみ}{曲げたわみ}$ と梁の長さとの関係を**図-2**〜 **図-4** 。梁の長さを長くしていくとたわみにおけるせん断たわみ項の影響はどんどん小さくなっていく。そのため、境界値問題による解法、FEM、単位荷重と、どの場合においても $\frac{たわみ}{曲げたわみ}$ の値は 1 に近づいて

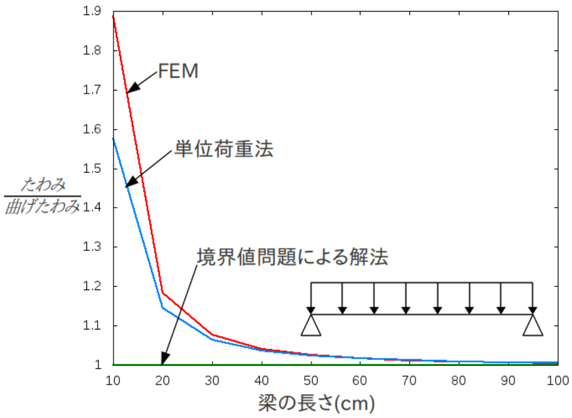


図–2 $\frac{\text{たわみ}}{\text{曲げたわみ}}$-梁の長さ (5cm × 2cm 断面)

いく。片持ち梁等分布荷重 (**図-2**) と片持ち梁三角形等分布荷重 (**図-3**) を見てみると、どちらの場合においても梁の長さに関係なく、FEM 値は単位荷重法の値に近づいていくことが分かる。また、どの断面の場合においても同様の結果が得られる。 せん断たわみ項の影響を最も受ける梁の長さ 10cm の場合での相対誤差が、片持ち梁等分布荷重の場合で境界値問題による解法で 14 %、単位荷重法でー 4 %、片持ち梁三角形等分布荷重の場合で境界値問題による解法で 38 %、単位荷重法でー 6 %と相対誤差に大きな開きがある。よって FEM 値はせん断たわみ項の影響はさほど受けていないことが分かる。次に、単純梁等分布荷重 (**図-4**) について見てみると、境界値問題による解法でたわみを計算した際には、せん断たわみが 0 になるため、$\frac{\text{たわみ}}{\text{曲げたわみ}}$ が常に 1 となる。しかし、せん断たわみが 0 のためせん断たわみ項の影響を最も受ける梁の長さ 10cm の場合での相対誤差が、境界値問題による解法でー 47 %、単位荷重法でー 16 %とこちらの場合においても誤差に大きな開きが出る。また、たわみは FEM 値はせん断たわみの影響を受けているため、単純梁等分布荷重についても片持ち梁の時と同様に梁の長さに関係なく、どの断面においても FEM 値は単位荷重法の値に近づいていくことがわかった。



図–3 $\frac{\text{たわみ}}{\text{曲げたわみ}}$-梁の長さ (5cm × 2cm 断面)



図–4 $\frac{\text{たわみ}}{\text{曲げたわみ}}$-梁の長さ (5cm × 2cm 断面)

5. まとめ

今回の研究では、片持ち梁等分布荷重の場合、片持ち梁三角形等分布荷重、単純梁等分布荷重の場合について検討したが、どの断面においても梁の長さを長くしても有限要素で解析したたわみの値は、単位荷重法で求めたたわみの値に近づく。単純梁等分布荷重では、境界値問題による解法でのたわみが曲げたわみしか出なかったために、単位荷重法に比べて誤差が大きく出る結果となった。今回の結果を受けて、なぜ FEM 解が境界値問題による解法の解に近づくかなかったのかは、今後三次元弾性論を用いて検討していく必要がある。

参考文献

1) 滝田拓史・後藤文彦・佐々木貴信・清水光弘・安倍隆一：角材を用いたオンサイト応急橋のせん断挙動
2) 建設学生が学ぶ「構造力学」