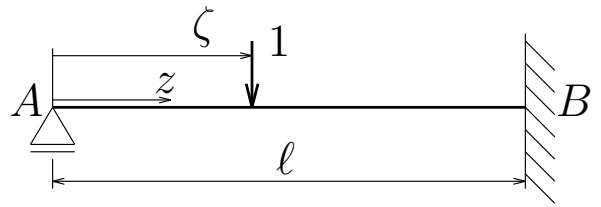
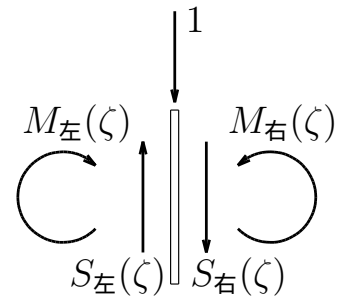


図のような左端ローラー支承、右端固定で単位荷重を受ける不静定梁の左端を原点として、梁軸に沿って右向き正に座標 z と ζ を取る。 z は着目したい点の位置を示し、 ζ は単位荷重の載荷位置を示す。まず、 ζ を定数とみなしてこの梁のたわみ $v(z)$ を z の関数として求めたいが、この梁は不静定梁で力のつりあいから曲げモーメント分布を求めることができないので、梁の支配方程式 $-EIv'''' + q = 0$ を積分してたわみを求めようと思う。便宜上、単位荷重の載荷位置より左側の部分 ($0 < z < \zeta$) のたわみを $v_{左}(z)$ 、単位荷重の載荷位置より右側の部分 ($\zeta < z < l$) のたわみを $v_{右}(z)$ と表記することにすると、以下の問に答えよ。



問 1

積分定数を決定するのに必要な両端の境界条件、単位荷重載荷点での連続条件を $v_{左}(z)$, $v_{右}(z)$ やこれらの微分を用いた表現で記せ。また、単位荷重載荷点から切り出した図のような微小部分のつりあい条件を、微小部分の左の切断面に作用するせん断力と曲げモーメントを $S_{左}(\zeta)$, $M_{左}(\zeta)$ とし、微小部分の右の切断面に作用するせん断力と曲げモーメントを $S_{右}(\zeta)$, $M_{右}(\zeta)$ として記せ。また、これらを $v_{左}$, $v_{右}$ の微分を用いた表現で書き直せ。



以上の諸条件を用いて積分定数を手計算で決定するのはなかなか時間がかかるので、たわみの正解を以下に示しておく。

$$v_{左}(z, \zeta) = \frac{(\ell - \zeta)^2}{12\ell^3 EI} \{-(2\ell + \zeta)z^3 + 3\zeta\ell^2 z\} \quad (0 < z < \zeta)$$

$$v_{右}(z, \zeta) = \frac{\zeta}{12\ell^3 EI} \{(3\ell^2 - \zeta^2)z^3 - 6\ell^3 z^2 + 3\ell^2(\ell^2 + \zeta^2)z - 2\zeta^2\ell^3\} \quad (\zeta < z < \ell)$$

境界条件 (左端: 2つ) $v_{左}(0) = 0, \quad v_{左}''(0) = 0$

境界条件 (右端: 2つ) $v_{右}(\ell) = 0, \quad v_{右}'(\ell) = 0$

連続条件 (2つ) $v_{左}(\zeta) = v_{右}(\zeta), \quad v_{左}'(\zeta) = v_{右}'(\zeta)$

つりあい条件 (S, M の表現で 2つ)

 $-S_{左}(\zeta) + 1 + S_{右}(\zeta) = 0, \quad -M_{左}(\zeta) + M_{右}(\zeta) = 0$

つりあい条件 (v の微分の表現で 2つ)

 $EIv_{左}'''(\zeta) + 1 - EIv_{右}'''(\zeta) = 0, \quad EIv_{左}''(\zeta) - EIv_{右}''(\zeta) = 0$

問 2

問 1 のたわみの式を用いて、単位荷重よりも左側のたわみ角 $v'_{左}(z, \zeta)$, 単位荷重よりも右側のたわみ角 $v'_{右}(z, \zeta)$, 単位荷重よりも左側の曲げモーメント $M_{左}(z, \zeta)$, 単位荷重よりも右側の曲げモーメント $M_{右}(z, \zeta)$, 単位荷重よりも左側のせん断力 $S_{左}(z, \zeta)$, 単位荷重よりも右側のせん断力 $S_{右}(z, \zeta)$ を z の関数として記せ。

$$v'_{左}(z, \zeta) = \frac{(\ell - \zeta)^2}{4\ell^3 EI} \{ -(2\ell + \zeta)z^2 + \zeta\ell^2 \} \quad (0 < z < \zeta)$$

$$v'_{右}(z, \zeta) = \frac{\zeta}{4\ell^3 EI} \{ (3\ell^2 - \zeta^2)z^2 - 4\ell^3 z + \ell^2(\ell^2 + \zeta^2) \} \quad (\zeta < z < \ell)$$

$$M_{左}(z, \zeta) = \frac{(\ell - \zeta)^2 (2\ell + \zeta) z}{2\ell^3} \quad (0 < z < \zeta)$$

$$M_{右}(z, \zeta) = \frac{\zeta \{ (2\ell^3 - (3\ell^2 - \zeta^2)z) \}}{2\ell^3} \quad (\zeta < z < \ell)$$

$$S_{左}(z, \zeta) = \frac{(\ell - \zeta)^2 (2\ell + \zeta)}{2\ell^3} \quad (0 < z < \zeta)$$

$$S_{右}(z, \zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2 - 3\ell^2)}{2\ell^3} \quad (\zeta < z < \ell)$$

問 3

問 2 の結果を用いて、両端の鉛直反力の影響線関数 $V_A(\zeta)$, $V_B(\zeta)$, 固定端のモーメント反力の影響線関数 $M_B(\zeta)$ を ζ の関数として求め、その影響線の概形を図示せよ。

$$V_A(\zeta) = \frac{(\ell - \zeta)^2 (2\ell + \zeta)}{2\ell^3}$$

$$V_B(\zeta) = \frac{\zeta(3\ell^2 - \zeta^2)}{2\ell^3}$$

$$M_B(\zeta) = \frac{\zeta(\zeta^2 - \ell^2)}{2\ell^2}$$

影響線は右に。鉛直反力の影響線は上を +, 曲げモーメントの影響線は下を + とせよ。

