Southwell 法による座屈荷重の算定

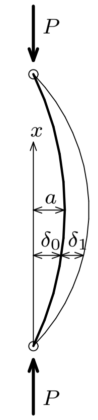

図 1:

図１に示すような元たわみ $\delta_0(x)$ を有す両端ヒンヂの柱が軸力 P を受ける場合、たわみ曲線 $\delta(x)$ は付加たわみ $\delta_1(x)$ を用いて

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 \tag{1}$$

と表せる。この時、断面の曲げモーメント $M(x)$ は

$$M = P(\delta_0 + \delta_1) \tag{2}$$

となる。たわみ δ_1 が十分に小さければ、$M = -EI\dfrac{d^2\delta_1}{dx^2}$ が成立し（但し EI は柱の曲げ剛性）、

$$EI\frac{d^2\delta_1}{dx^2} = -P(\delta_0 + \delta_1) \tag{3}$$

と書ける。今、柱の最大元たわみを a、軸長を ℓ として

$$\delta_0 = a\sin\frac{\pi x}{\ell} \tag{4}$$

と仮定すると、式 (3) は

$$\frac{d^2\delta_1}{dx^2} + \frac{P}{EI}\delta_1 = -\frac{P}{EI}a\sin\frac{\pi x}{\ell} \tag{5}$$

となる。式 (5) の一般解は

$$\delta_1 = A\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + B\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x + \frac{1}{\dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2 P} - 1}a\sin\frac{\pi x}{\ell} \tag{6}$$

となる。ここに A, B は任意の定数。どんな $\dfrac{P}{EI}$ についても端部条件 $x = 0, \ell$ で $\delta_1 = 0$ が成り立つためには $A = B = 0$. よって式 (6) は

$$\delta_1 = \frac{1}{\dfrac{\pi^2 EI}{\ell^2 P} - 1}a\sin\frac{\pi x}{\ell} \tag{7}$$

となる。これに Euler の座屈公式 $P_{cr} = \dfrac{\pi^2}{\ell^2}EI$ と式 (4) を用いれば

$$\delta_1 = \frac{\delta_0}{\dfrac{P_{cr}}{P} - 1} \tag{8}$$

と書ける。式 (8) を変形し

$$\frac{\delta_1}{P} = \frac{1}{P_{cr}}\delta_1 + \frac{\delta_0}{P_{cr}} \tag{9}$$

これは、ある点 x での $\dfrac{\delta_1}{P}$ を縦軸に、δ_1 を横軸に取ってその関係を図示すると直線となり、その傾きの逆数が座屈荷重 P_{cr} となることを示している（図２）。

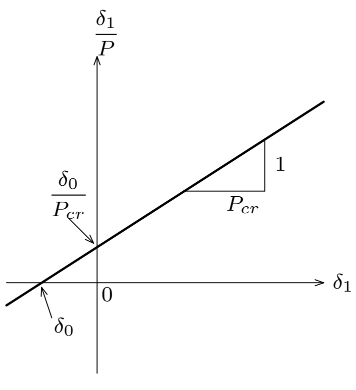

図 2: