

# せん断変形を伴う梁の有限要素曲げ解析

環境構造工学講座 01121 麓 貴行

指導教官：薄木 征三，後藤 文彦

## 1. はじめに

アメリカ材料試験学会 (ASTM D198)<sup>1)</sup>の基準では、木材梁の曲げ試験における梁長と曲げヤング率の関係から、せん断補正係数  $k$  を用いて木材のせん断弾性係数を推定する方法を提案しており、ねじり試験よりも簡単に行えるこの方法は、せん断弾性係数の推定に多く用いられている。ASTM D198 が  $k$  として与えているのは、Cowper<sup>2)</sup>が3次元弾性論から等方性材料の矩形梁に対して導いたもので、ポアソン比のみによって決まる値である。しかし、木材は等方性材料ではなく直交異方性材料であり、ポアソン比の測定値が0.5を越えることも珍しくはなく、こうしたせん断弾性係数の測定方法は必ずしも厳密とは言えない。本研究では立体要素の有限要素法で梁の曲げ試験を数値シミュレーションし、曲げ試験からせん断弾性係数を推定する方法の精度を考察する。

## 2. 解析手法

木材などの梁の曲げ試験は単純支持梁で行われるのが一般的だが、この解析では立体要素の要素数の節約のため、対称条件から単純梁の半分とみなせる片持ち梁の曲げ解析を行う。図-1に示すように、片持ち梁の固定端側の断面の図心を原点とし、幅厚方向に  $x$  軸、桁高方向に  $y$  軸、梁軸方向に  $z$  軸をとる。曲げを受ける片持ち梁の対称性を考慮し、 $yz$  面で2分割された梁の半部分を解析対象とする。この幅  $b/2$  の梁の  $x, y, z$  軸方向それぞれ、6, 10, 100要素に分割する。境界条件は、固定端断面 ( $xy$  断面) 上にある節点の  $z$  方向変位を拘束、対称面 ( $yz$  面) 上にある節点の  $x$  方向変位を拘束する。荷重は、自由端面の図心荷重や、中立軸線上の荷重にした場合、応力が集中する荷重箇所付近の要素分割を細かくしないと、精度が悪くなるので、ここでは荷重を自由端面の各節点に等分布に分散させて荷重する。

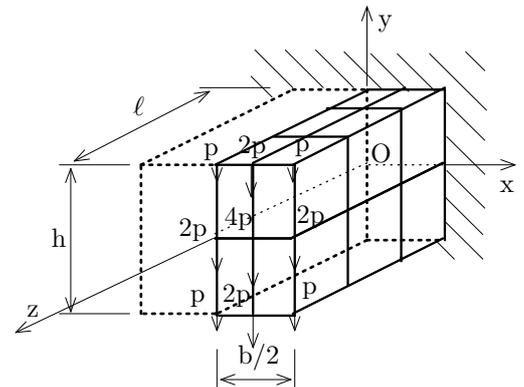


図-1 解析モデル

## 3. 数値計算

等方性材料である鋼材の材料定数  $E_x = 200$  GPa,  $\nu = 1/3$  と、木材工業ハンドブック<sup>3)</sup>にある木材の材料定数を参考にした、 $E_x = 0.5$  GPa,  $E_y = 1.0$  GPa,  $E_z = 10.0$  GPa,  $G_{xy} = 0.03$  GPa,  $G_{xz} = 0.6$  GPa,  $G_{yz} = 0.7$  GPa,  $\nu_{xy} = 0.2$ ,  $\nu_{yx} = 0.4$ ,  $\nu_{xz} = 0.025$ ,  $\nu_{zx} = 0.5$ ,  $\nu_{yz} = 0.03$ ,  $\nu_{zy} = 0.3$  で与えられる材料定数を有する梁の曲げ解析で得られたたわみの FEM 解と、ティモシェンコ梁理論のたわみ ( $\delta_t = \frac{P\ell^3}{3EI} + \frac{Pl}{GkA}$ ) を初等梁理論のたわみ ( $\delta_b = \frac{P\ell^3}{3EI}$ ) との相対誤差で図-2に示す。せん断補正係数  $k$  の値は、等方性材料の矩形断面に対する Cowper の式  $k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$  で  $\nu = 0$  とした  $k = \frac{5}{6}$  を用いた。ティモシェンコ梁理論と FEM 解はあまり変わらない値を示している。梁理論との相対誤差は、 $\ell/h$  が大きくなるにつれて鋼材の解とはあまり変わらないが、木材は、 $\ell/h = 10$  でも相対誤差が5%ぐらいあり、 $\ell$  が長くてもせん断の影響は無視できない。

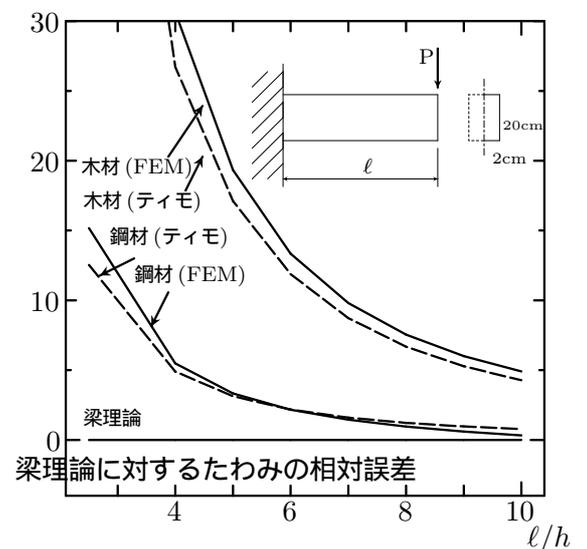


図-2 各梁理論に対するたわみの相対誤差

$\delta_t$  を  $k$  について解くと次式が得られる。

$$k = \frac{P}{GA} \cdot \frac{\ell}{\delta_t - \frac{P\ell^3}{3EI}} \quad (1)$$

有限要素解析で得られる荷重  $P$  とたわみ  $\delta$  の関係を上式に代入して逆算した  $k$  を図-3 に示す。本来は変わらないはずの  $k$  がこの逆算した  $k$  では  $\ell/h$  の増加とともに、次第に大きくなっていく。この梁は、せん断変形の影響が大きい梁であるためか、この  $\ell/h$  の範囲では、 $\ell/h$  が大きくなるにつれて、 $k = \frac{5}{6}$  に近づいていく。

荷重とたわみの関係から求まる（せん断変形の影響が含まれている）見かけ上のヤング率を  $E' = \frac{P\ell^3}{3I\delta_t}$  とおくと、矩形梁では次式のように変形できる。

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{4kG} \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \quad (2)$$

この関係から  $\frac{1}{E'}$  と  $\left(\frac{h}{\ell}\right)^2$  をプロットすれば、回帰直線の切片と傾きとから試験体のヤング率とせん断弾性係数が推定できる<sup>1),5)</sup>。有限要素解から得られた  $\frac{1}{E'}$  と  $\left(\frac{h}{\ell}\right)^2$  の関係を、図-4 に示す。ほぼ線形分布が得られ、この回帰直線の切片と傾きとから  $k = \frac{5}{6}$  を用いて推定される解析モデルのヤング率とせん断弾性係数は、それぞれ 10.2 GPa (+1.5%), 0.575 GPa (-18%) となった（但し、括弧内は解析モデルの  $E_z = 10.0$  GPa,  $G_{yz} = 0.70$  GPa に対する相対誤差）。

$k$  の値が  $\ell/h$  に依存して変化しているのが FEM 解による数値誤差なのかを確認するために、せん断弾性係数が正確に測定できる等方性材料の亚克力を用いて実験を行った。まず引っ張り試験を行い、応力 - ひずみ曲線と縦横のポアソン比からせん断弾性係数  $G$  を測定し、その値を用いた FEM 解と、曲げ試験で得られたたわみを式 (1) に代入し、プロットした。その関係を図-5 を示す。実験の精度が悪く  $k$  が 0.2 ぐらいの小さい値がでていますが、 $\ell/h$  が大きくなっても  $k$  は変化しなさそうである。

#### 4. まとめ

木材梁の曲げを直交異方性材料でモデル化し有限要素解析した。

有限要素解の荷重 - たわみ関係から逆算されるせん断補正係数  $k$  の値は、梁長に依存して変化することが分かった。なお、木材の曲げ試験からせん断弾性係数を推定するのと同じ方法で、今回の有限要素解の荷重 - たわみ関係から解析モデルのヤング率とせん断弾性係数を推定したところ、ヤング率に関しては解析モデルに対して 1% 程度の誤差の推定値が得られたが、せん断弾性係数に関しては解析モデルよりも 20% 近くも小さい推定値が得られた。このように推定精度が悪くなることは、 $k$  の値が  $\ell/h$  に依存して変化していることから予想される。しかし、実験の精度が悪く正確に確認することが出来なかったために、精度を高めることを今後の課題としたい。

#### 参考文献

- 1) American Society for Testing and Materials : Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes, ASTM Standards, D198-94, 1994.
- 2) Cowper, G.R. : The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, J.appl.Mech., Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 3) 農林水産省林業試験場 監修 : 木材工業ハンドブック (改訂 3 版), 丸善, 1982, pp.130.
- 4) 後藤文彦・麓 貴行・薄木征三・佐々木貴信 : 曲げ試験による木材梁せん断弾性係数推定の精度, 構造工学論文集, Vol. 49A, 2003 (掲載予定)
- 5) 長谷部薫・薄木征三 : 集成木材はりの横座屈解析と実験, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 963-970, 1992.

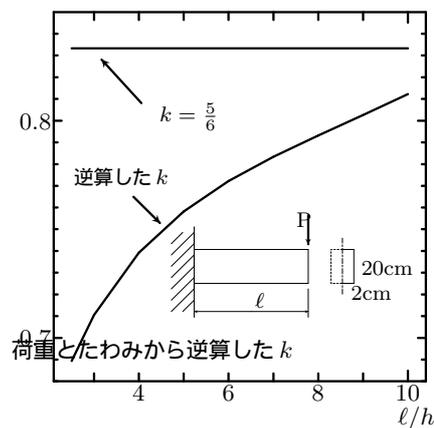


図-3 荷重 - たわみ関係から逆算した  $k$

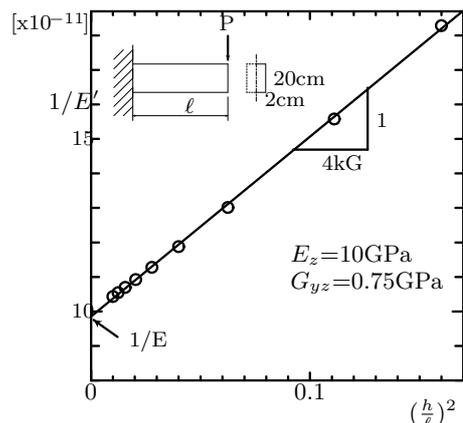


図-4 せん断弾性係数算定プロット

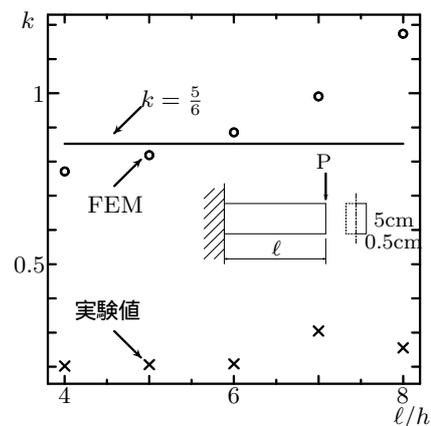


図-5  $k$  の推移