

板要素を用いた大変位解析の一定式化

後藤 文彦

実は、これは2000年頃に某論文集に投稿したら「新奇性がない」と言われて否になった原稿。まあ、(この板要素のネタで)書き直したり(定式化/計算し直したり)する予定は当面はないので、取り敢えず、pdfにして公開してみます。一応、元ネタとしては、参考文献¹⁾辺りにも、2ページくらいの概要が書いてます。

1. まえがき

近年、共回転座標などを用いて要素の剛体的な変位成分を取り除いた実質的な微小変形成分を線形理論または低次非線形理論の剛性方程式で評価するいわゆる剛体変位除去の手法が、シェルの有限変位解析にも適用されてきている^{2),3),4)}。こうした剛体変位除去の手法では、局所座標系での剛性方程式の組み立ては簡単であるものの、要素の有限回転は適切に表現しなければならない。三次元の有限回転を表現する方法は色々あるが、独立な三成分を用いて表現する方法としては、回転疑似ベクトル^{5),6),7),8)}やオイラー角^{9),10),11),12)}を用いる方法などが一般的である。

回転疑似ベクトルは、回転軸の方向をベクトルの三成分で与えているので、自由度に用いた場合もベクトルの三成分としてそのまま座標変換することができるなどの利点があり、有限変位解析に最も広く多用されている。尤も、回転疑似ベクトルで表された座標変換行列の各成分には、分母に回転疑似ベクトル三成分のノルムがあるため、この三成分についての増分式が煩雑になり、また、このノルムが零の時に、数値的に特異になるなどの難点もある。一方、オイラー角の三成分はベクトルとして座標変換することはできないなどの難点があり、有限変位解析にはあまり多くは用いられてはいないが、座標変換行列の成分が三角関数の積の多項式として表されるため、増分式は比較的簡単になり、数値的な特異点を場合分けして回避するなどの工夫も特に必要はないといった利点もある。

また、剛体変位除去の手法において周知の線形剛性方程式を利用する場合、一般にその回転自由度成分および対応するモーメント外力成分は空間固定三軸回りの成分として定義されているため、回転疑似ベクトルでもオイラー角でもそのまま線形剛性方程式の回転自由度として用いることはできない。

さて、有限変位解析では、変位自由度に関する非線形な剛性方程式を接線剛性方程式など、増分式として解くのが一般的であり、その場合、回転自由度は微量として扱うことができる。つまり、座標変換行列の記述にはオイラー角を用いてその長所を活かしつつも、回転自由度には空間固定三軸回りの微小回転角を用いることもでき、回転自由度をベクトルとして座標変換することが可

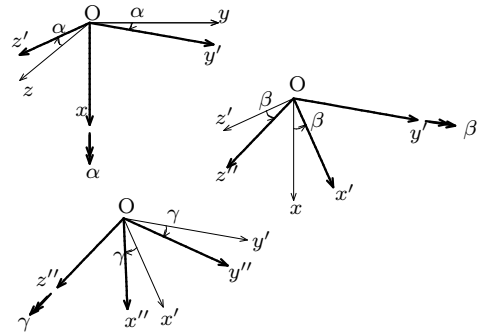


図-1 オイラー角

能となる。そのような定式化手法の妥当性については、著者等の過去の研究^{10),11)}で、梁要素について確認したが、本論文では、その手法を板要素にも拡張できることを確かめる。

2. 定式化

2.1 節点変位

本論文では、空間固定座標系の点 (x, y, z) が、回転移動する別の座標系において (x', y', z') と表される時、この関係を座標変換行列 T を用いて

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = T^T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

と表すことにする。また、行列 T^T の九成分は、図-1に示すような x, y', z'' -軸右ねじ回りに、それぞれ α, β, γ だけ順番に回転した回転角の三成分として定義されるオイラー角を用いると、次のように表される。

$$T^T = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \alpha \\ & + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\cos \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \sin \alpha \\ & -\sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & +\sin \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix}$$

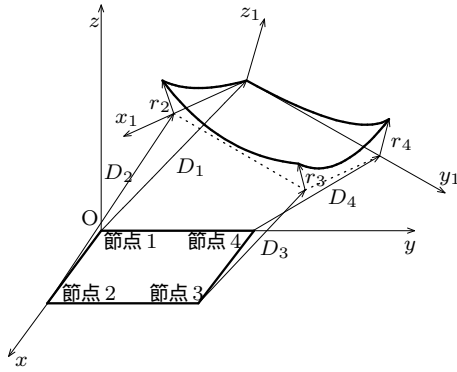


図-2 節点変位

図-2 に示すように、直角をなす二辺が空間固定座標 (x, y, z) の x, y -軸と重なるように長方形の板要素が横たわっているとす。この板要素の原点と重なる節点を節点1とし、ここから z -軸右ねじ回りに節点2, 節点3, 節点4 を図のように定める。この板要素の節点変位ベクトル d を次式で定義する。

$$d \equiv \left[d_1^T \quad d_2^T \quad d_3^T \quad d_4^T \right]^T \quad (2)$$

$$d_i \equiv \left[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \right]^T \quad (3)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

ここに、 d_i は節点 i における変位ベクトル、 u_i, v_i, w_i はそれぞれ節点 i における x, y, z -軸方向の並進変位、 $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ はそれぞれ節点 i における x, y, z -軸右ねじ回りの回転角である。この空間固定三軸回りの回転角を用いて有限な回転を表すことはできないが、後で微小量として扱える相対回転角を導くために、ここでは形式的に用いておく。更に、回転角成分に有限な回転を表せるオイラー角を用いた節点変位ベクトル \underline{d} も次式で定義しておく。

$$\underline{d} \equiv \left[\underline{d}_1^T \quad \underline{d}_2^T \quad \underline{d}_3^T \quad \underline{d}_4^T \right]^T \quad (4)$$

$$\underline{d}_i \equiv \left[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i \right]^T \quad (5)$$

$(i = 1, 2, 3, 4)$

ここに、 $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ は節点 i の回転角のオイラー角による表現である。

さて、図-2のように、初期状態において節点1が原点 $(0, 0, 0)$ 、節点2が $(a, 0, 0)$ 、節点3が $(a, b, 0)$ に横たわっている板要素が、変形を伴う変位 $d = [d_1^T \quad d_2^T \quad d_3^T \quad d_4^T]^T$ を生じ、実線で示されるような状態であつていとす。一方、初期状態においてこの板要素と完全に重なっている剛体板要素が、節点1にちょうど d_1 だけ変位を生じる位置まで剛体的に移動したとす。このときの剛体板の節点変位 $D \equiv [D_1^T \quad D_2^T \quad D_3^T \quad D_4^T]^T$

は、幾何学的考察から以下のように表される。

$$D_i = \left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{array} \right\} + T_1 \left\{ \begin{array}{c} \xi_i a \\ \eta_i b \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \xi_i a \\ \eta_i b \\ 0 \end{array} \right\} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{array} \right] \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (0, 1, 1, 0)$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (0, 0, 1, 1)$$

ここに $T_1 = T(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ である。 D に対する d の相対変位ベクトルは次式で表される。

$$r \equiv \left[r_1^T \quad r_2^T \quad r_3^T \quad r_4^T \right]^T \quad (7)$$

$$r_i \equiv \left[r_i^u \quad r_i^v \quad r_i^w \quad r_i^{\theta x} \quad r_i^{\theta y} \quad r_i^{\theta z} \right]^T$$

$$\equiv d_i - D_i =$$

$$\left[\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} u_i - u_1 \\ v_i - v_1 \\ w_i - w_1 \end{array} \right\} - T_1 \left\{ \begin{array}{c} \xi_i a \\ \eta_i b \\ 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \xi_i a \\ \eta_i b \\ 0 \end{array} \right\} \\ \theta_{xi} - \theta_{x1} \\ \theta_{yi} - \theta_{y1} \\ \theta_{zi} - \theta_{z1} \end{array} \right]$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (0, 1, 1, 0)$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (0, 0, 1, 1)$$

このように、板要素の剛体的な変位成分を節点1の変位 d_1 で代表させることにより、相対変位 r に実質的な変形成分を受け持たせる。微小ひずみの仮定が常に成立するような問題を対象にするならば、離散化解析においてその要素分割を十分に小さくすることで、この相対変位は微小と見なすことができる。よって、式(10)の相対回転角 $(\theta_{xi} - \theta_{x1}, \theta_{yi} - \theta_{y1}, \theta_{zi} - \theta_{z1})$ は、空間固定三軸回りの微小なベクトル三成分として扱うことができる。さて、空間固定三軸回りの回転の微小な変動量三成分は、オイラー角の微小な変動量三成分と次のような幾何学的関係にある^{10),11)}。

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\cos \beta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \gamma \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \Delta \gamma \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & \sin \alpha \tan \beta & -\cos \alpha \tan \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \beta / \cos \beta & \cos \alpha / \cos \beta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \\ \Delta \theta_z \end{array} \right\} \quad (9)$$

式(9)の回転角の変動量を要素の二節点間での相対回転角に読み換え、式(9)の有限なオイラー角成分を二節点間での値の平均に読み換えると、式(10)は次のように書き換えられる。

$$r_i = \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \\ w_2 - w_1 \end{Bmatrix} - T_1 \begin{Bmatrix} \xi_i a \\ \eta_i b \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \xi_i a \\ \eta_i b \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \\ 0 & \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} & -\cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ 0 & \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} & \cos \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \beta_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (0, 1, 1, 0)$$

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = (0, 0, 1, 1)$$

2.2 剛性方程式

前章の剛体板要素の節点 1 を原点とし、節点 2 方向に x_1 - 軸、節点 4 方向に y_1 - 軸、これらと右手系になるように板平面法線方向に z_1 - 軸を 図-2 のように選び、局所座標系 (x_1, y_1, z_1) を定義する。前章で定義した相対変位ベクトル r の並進変位三成分と回転変位三成分をこの局所座標系の成分で表した局所系の相対変位ベクトル r_ℓ は、座標変換行列 T を用いて以下のように表される。

$$r_\ell = T_{24}^T r \quad (12)$$

$$T_{24} \equiv \begin{bmatrix} T_6 & o_6 & o_6 & o_6 \\ o_6 & T_6 & o_6 & o_6 \\ o_6 & o_6 & T_6 & o_6 \\ o_6 & o_6 & o_6 & T_6 \end{bmatrix}$$

$$T_6 \equiv \begin{bmatrix} T & o_3 \\ o_3 & T \end{bmatrix}$$

ここに、 o_6, o_3 はそれぞれ $6 \times 6, 3 \times 3$ の零行列である。

さて、ここで節点変位ベクトル d に対応する節点外力ベクトル f を次式で定義する。

$$f \equiv [f_1^T \ f_2^T \ f_3^T \ f_4^T]^T \quad (13)$$

$$f_i \equiv [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi}]^T$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

ここに、 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} はそれぞれ x, y, z - 軸方向の節点外力、 M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} はそれぞれ x, y, z - 軸右ねじ回りの節点外力モーメントである。 f の外力三成分と外力モーメント三成分を局所座標系の成分で表した局所系の節点外力ベクトル f_ℓ は、要素の変形が無視できるならば、式 (12) と同様に次式のように表される。

$$f_\ell = T_{24}^T f \quad (14)$$

さて、 r_ℓ が微小とみなせるならば、 f_ℓ と r_ℓ は居所座標系 (x_1, y_1, z_1) において、周知の線形剛性行列を利用して次式のように関係づけることができる。

$$f_\ell = K r_\ell \quad (15)$$

ここに、 K の各成分は、次のように定めた。 (F_{xi}, F_{yi}) と (r_i^u, r_i^v) とを関係づける行列成分には、長方形平面応力要素¹³⁾の線形剛性行列を用いた。 (F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}) と $(r_i^w, r_i^{\theta x}, r_i^{\theta y})$ とを関係づける行列成分には長

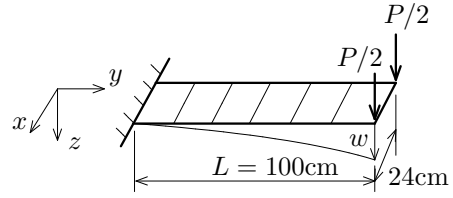


図-3 片持ち梁のエラスティカ (解析モデル)

方形板曲げ要素^{13),14),15)}の線形剛性行列を用いた。 M_{zi} と $r_i^{\theta z}$ とを関係づける行列成分は、モーメントの釣り合いを破らないように仮想的な剛性係数を次式のように仮定した¹⁵⁾。

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{Bmatrix} = \alpha Et A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここに、 E はヤング率、 t は板要素の厚さ、 A は板面の面積、 α は係数で、数値解析が可能な限り 0 に近いほど厳密解に近い数値解が得られるが¹⁵⁾、0.03 程度が適当とされているので¹⁶⁾本解析でも $\alpha = 0.03$ とした。なお、 K の具体的な成分については補遺に記す。

さて、式 (15) に式 (14) と式 (12) を代入すると、全体座標系で表した剛性方程式が次式のように求まる。

$$f = T_{24} K T_{24}^T r \quad (17)$$

ここで、 T_{24} の各成分は $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ の関数として与えられ、 r の各成分は $(u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_{yi}, \gamma_{zi})$ の関数として与えられるから、式 (17) は d に関する非線形方程式として与えられる。つまり、式 (17) の d に関する増分を取れば、以下のような接線剛性方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta f &= \\ & \left[\frac{\partial T_{24}}{\partial d} K T_{24}^T r + T_{24} K \frac{\partial T_{24}^T}{\partial d} r + T_{24} K T_{24}^T \frac{\partial r}{\partial d} \right] \Delta d \\ & = K_t \Delta d \end{aligned} \quad (18)$$

ここに、 K_t は Δf と Δd を関係付ける接線剛性行列である。式 (18) の Δd の回転角成分はオイラー角成分であるが、 Δf のモーメント成分は空間固定三軸回りの成分である。各要素の接線剛性行列を重ね合わせる場合、特に折れ板構造の解析の際に変位ベクトルを座標変換する場合など、変位ベクトルの回転角成分はモーメント外力に対応して空間固定三軸回りの成分で定義されていた方が便利である。そこで、式 (10) を用いて Δd を次式のように Δd を用いた表現に書き直す。

$$\Delta d = E \Delta d \quad (19)$$

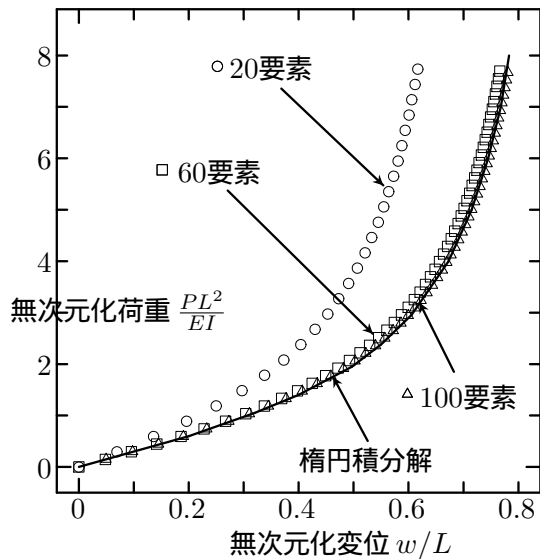


図-4 片持ち梁のエラスティカ

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & o_6 & o_6 & o_6 \\ o_6 & E_2 & o_6 & o_6 \\ o_6 & o_6 & E_3 & o_6 \\ o_6 & o_6 & o_6 & E_4 \end{bmatrix}$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin \alpha_i \tan \beta_i & -\cos \alpha_i \tan \beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_i / \cos \beta_i & \cos \alpha_i \cos \beta_i \end{bmatrix}$$

($i = 1, 2, 3, 4$)

式 (19) を式 (18) に代入すると、最終的な接線剛性方程式が次式のように得られる。

$$\Delta f = K_t E \Delta d \quad (20)$$

本研究では、式 (20) を全ての分割要素に対して重ね合わせた全体接線剛性方程式の解法に弧長増分法を用いる。

3. 数値解析

以下にいくつかの数値解析例を示すが、式 (20) における $\Delta \theta_{zi}$ の回転成分はすべて拘束して計算している。

3.1 片持ち梁のエラスティカ

曲げを受ける大変位の問題として、図-3 に示すような片持ち梁のエラスティカ問題を解析する。解析モデルの諸元は、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、部材軸方向の長さ $L = 100 \text{ cm}$ 、幅 24 cm 、厚さ $t = 2 \text{ cm}$ である。なお、本定式化は薄板を対象としているが、一軸部材に対応するようにポアソン比 $\nu = 0$ として計算する。要素分割は図-3 に示すように幅方向には分割せず部材軸

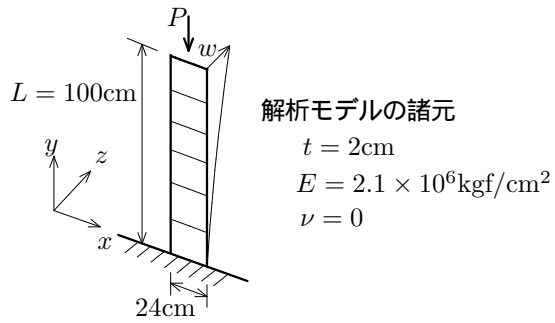


図-5 柱のエラスティカ (解析モデル)

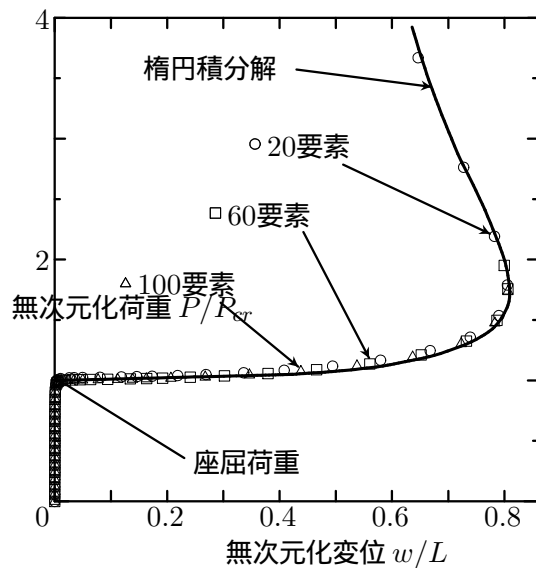
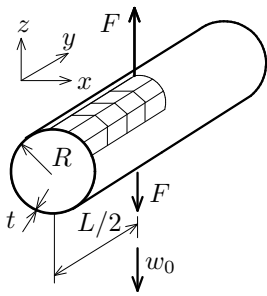


図-6 柱のエラスティカ

方向にのみ分割する。梁の曲げ剛性を EI として無次元化した荷重 PL^2/EI と無次元化変位 w/L の関係を、楕円積分解¹⁷⁾とあわせて図-4 に示す。部材軸方向の分割数を 20, 60, 100 と増やすに従って楕円積分解に近づいていき、100 分割ではほぼ楕円積分解に一致する。

3.2 柱のエラスティカ

次に圧縮による座屈後の問題として、図-5 に示すような柱のエラスティカ問題を解析する。解析モデルの諸元は、前節の片持ち梁のエラスティカのモデルと同様である。要素分割は幅方向に分割せず、部材軸方向にのみ分割する。初期たわみは、頂部におけるたわみ w_0 が部材軸方向の長さ L の $1/100$ となるように、 $w/L = 0.01\{1 - \cos(\pi x/2L)\}$ を与える。部材軸方向に 10 分割した場合の無次元化荷重 P/P_{cr} と無次元化変位 w/L の関係を、楕円積分解¹⁷⁾とあわせて図-6 に示す。部材軸方向の分割数を 20, 60, 100 として計算したが、20 分割で



解析モデルの諸元

$$E = 7.386 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0.3125$$

$$t = 0.037 \text{ cm}$$

$$L = 4.075 \text{ cm}$$

$$R = 1.950 \text{ cm}$$

図-7 集中荷重を受ける（解析モデル）

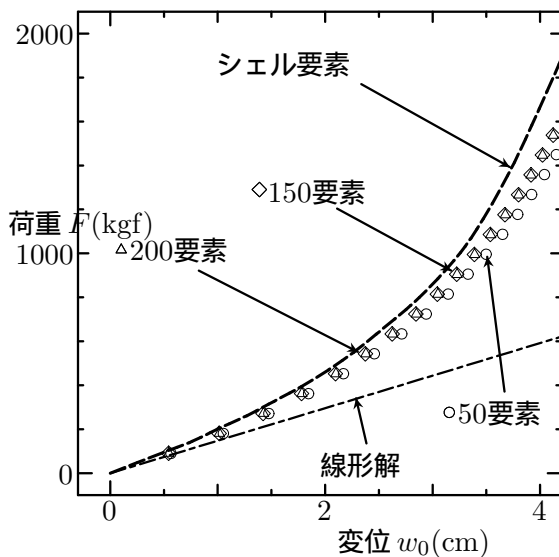


図-8 集中荷重を受ける円管

も、ほぼ楕円積分解に一致している。

3.3 集中荷重を受ける円管

三次元シェルの問題として、図-7 に示すような側面中央の二点を集中荷重で引っ張られる円管を解析する。式 (20) の Δf と Δd とに初期状態での板要素の方向を定める座標変換行列をかけることで、曲面を折れ板で近似する。解析モデルの諸元はヤング率 $E = 7.386 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、厚さ $t = 0.037 \text{ cm}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3125$ 、円管の長さ $L = 4.075 \text{ cm}$ 、半径 $R = 1.950 \text{ cm}$ である。解析は図-7 に示すような $1/8$ 領域について行い、要素分割は円管の長さ方向は 5 分割で固定し、円周方向の分割数を 10, 30, 40 とする。集中荷重 F とたわみ w_0 の関係を線形解³⁾、Nolte の曲面シェル要素による解¹⁸⁾とあわせて図-8 に示す。本数値解は 150 要素程度で収束値に達しており、Nolte の解に対して、相対誤差にして 5% 程度大きい。これは、曲面を折れ板近似した影響が出たものかも知れない。因みに本解析と同様の手法で

回転を扱った梁の定式化¹⁰⁾においては、曲がり梁を折れ線近似しても、要素数を増やしさえすれば円弧要素と同等の精度が得られる¹⁹⁾。

3.4 周辺単純支持正方形板の座屈

最後に、面内力を受ける板の面外座屈を解析する。図-9 に示すような周辺単純支持正方形板に一樣な圧縮応力 σ が作用しているときの座屈応力 σ_{cr} を求める。解析モデルの諸元は一辺 100 cm の正方形板で、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.25$ 、厚さ $t = 1 \text{ cm}$ である。要素分割は図-9 に示すような $1/4$ 領域について、 x, y 方向ともに等分割する。座屈判定は、式 (20) の接線剛性行列 $K_t E$ をガウスの消去法で前進消去した時点でできる上三角形行列の負の対角項の数が、最初は 0 個の状態から、1 個（以上）へと増える点を探査することで行う。図-10 に、Timoshenko の解析解¹⁷⁾に対する本数値解の相対誤差と要素数との関係を両対数でプロットしたものを示す。要素数がある程度以上大きい領域からは直線分布となっていることから、本数値解は解析解に収束していると考えられる。

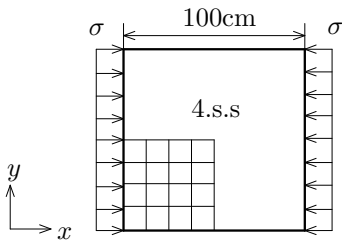
4. まとめ

4 節点 24 自由度の長方形板要素を用いたシェルの有限変位解析手法を定式化した。座標変換行列の記述にはオイラー角を用いてその長所を活かしつつも、接線剛性方程式の回転自由度には空間固定三軸回りの微小回転角を用いることで、回転自由度の座標変換を可能とした。エラスティカ問題の棒を細長い板に置き換えて解析したところ、本数値解は解析解と非常によく一致した。円管の大変位の問題を折れ板で近似して解析したところ、本数値解は既存のシェル要素の解に対して 5% 程度の相対誤差を生じた。平板の面外座屈の問題を解析したところ、本数値解は解析解に収束した。以上のことから、本定式化手法では平板の三次元大変位問題は精度よく解析できるが、シェル状のものを折れ板近似すると、やや精度が落ちるものと推測される。本手法と同様の手法で回転を扱った梁の定式化においては、曲がり梁を折れ線近似しても、要素数を増やしさえすれば円弧要素と同等の精度が得られることが確認されているため、この問題に関しては今後も引き続き検討したい。

5. 補遺

剛性行列 K の成分を次に示す。

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & & & & \text{対称} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & & & \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} & & \\ K_{4,1} & K_{4,2} & K_{4,3} & K_{4,4} & \end{bmatrix}$$



解析モデルの諸元

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$$

$$h = 1\text{cm}$$

$$\nu = 0.25$$

図-9 周辺単純支持正方形板の座屈（解析モデル）

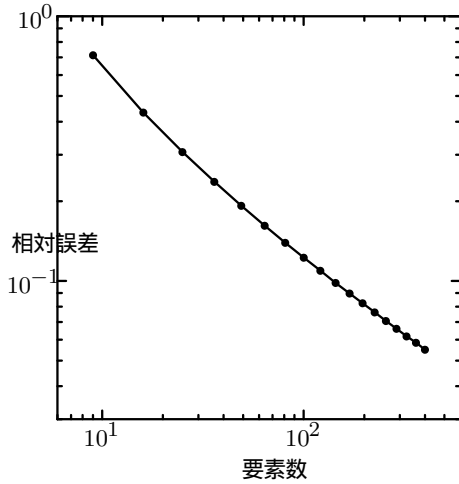


図-10 周辺単純支持正方形板の座屈

$K_{i,j}$ の成分を以下に示す .

$$K_{1,1} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & & \\ C_2 & C_3 & & & & & \\ 0 & 0 & S_1 & & & & \\ 0 & 0 & S_5 & S_{13} & & & \\ 0 & 0 & -S_9 & -S_{17} & S_{18} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$K_{2,1} = \begin{bmatrix} C_4 & -C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & C_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & S_6 & S_{10} & 0 \\ 0 & 0 & S_6 & S_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{10} & 0 & S_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P/3 \end{bmatrix}$$

$$K_{2,2} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & & \\ -C_2 & C_3 & & & & & \\ 0 & 0 & S_3 & & & & \\ 0 & 0 & S_5 & S_{13} & & & \\ 0 & 0 & S_9 & S_{17} & S_{18} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$K_{3,1} = \begin{bmatrix} -C_1/2 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & -C_3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & -S_7 & S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & S_7 & S_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{11} & 0 & S_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P/3 \end{bmatrix}$$

$$K_{3,2} = \begin{bmatrix} C_7 & -C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & C_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_4 & -S_8 & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_8 & S_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12} & 0 & S_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P/3 \end{bmatrix}$$

$$K_{3,3} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & & \\ C_2 & C_3 & & & & & \\ 0 & 0 & S_1 & & & & \\ 0 & 0 & -S_5 & S_{13} & & & \\ 0 & 0 & S_9 & -S_{17} & S_{18} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

$$K_{4,1} = \begin{bmatrix} C_7 & C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_5 & C_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_4 & -S_8 & -S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_8 & S_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{12} & 0 & S_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P/3 \end{bmatrix}$$

$$K_{4,2} = \begin{bmatrix} -C_1/2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & -C_3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & -S_7 & -S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & S_7 & S_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & 0 & S_{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P/3 \end{bmatrix}$$

$$K_{4,3} = \begin{bmatrix} C_4 & -C_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_5 & C_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & -S_6 & -S_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -S_6 & S_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{14} & 0 & S_{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P/3 \end{bmatrix}$$

$$K_{4,4} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & & \\ -C_2 & C_3 & & & & & \\ 0 & 0 & S_1 & & & & \\ 0 & 0 & -S_5 & S_{13} & & & \\ 0 & 0 & -S_9 & S_{17} & S_{18} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix}$$

ここに, C_i, S_i, P は以下の式で表される .

$$C_1 = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{b}{3a} + \frac{1-\nu}{6} \frac{a}{b} \right)$$

$$C_2 = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{4} + \frac{1-\nu}{8} \right)$$

$$C_3 = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{a}{3b} + \frac{1-\nu}{6} \frac{b}{a} \right)$$

$$C_4 = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(-\frac{b}{3a} + \frac{1-\nu}{12} \frac{a}{b} \right)$$

$$C_5 = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{4} - \frac{1-\nu}{8} \right)$$

$$\begin{aligned}
C_6 &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{a}{6b} - \frac{1-\nu}{6} \frac{b}{a} \right) \\
C_7 &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{b}{6a} - \frac{1-\nu}{6} \frac{a}{b} \right) \\
C_8 &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left(-\frac{a}{3b} + \frac{1-\nu}{12} \frac{b}{a} \right) \\
S_1 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(120 \frac{b^2}{a^2} + 120 \frac{a^2}{b^2} + 84 - 24\nu \right) \\
S_2 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(-120 \frac{b^2}{a^2} + 60 \frac{a^2}{b^2} - 84 + 24\nu \right) \\
S_3 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(-60 \frac{b^2}{a^2} - 60 \frac{a^2}{b^2} + 84 - 24\nu \right) \\
S_4 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(60 \frac{b^2}{a^2} - 60 \frac{a^2}{b^2} + 84 - 24\nu \right) \\
S_5 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(60 \frac{a^2}{b} + 6b + 24b\nu \right) \\
S_6 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(30 \frac{a^2}{b} - 6b - 24b\nu \right) \\
S_7 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(30 \frac{a^2}{b} - 6b + 6b\nu \right) \\
S_8 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(60 \frac{a^2}{b} + 6b - 6b\nu \right) \\
S_9 &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(60 \frac{b^2}{a} + 6a + 24a\nu \right) \\
S_{10} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(60 \frac{b^2}{a} + 6a - 6a\nu \right) \\
S_{11} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(30 \frac{b^2}{a} - 6a + 6a\nu \right) \\
S_{12} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} \left(30 \frac{b^2}{a} - 6a - 24a\nu \right) \\
S_{13} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (8b^2 + 40a^2 - 8b^2\nu) \\
S_{14} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (-8b^2 + 20a^2 + 8b^2\nu) \\
S_{15} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (2b^2 + 10a^2 - 2b^2\nu) \\
S_{16} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (-2b^2 + 20a^2 + 2b^2\nu) \\
S_{17} &= \frac{Et^3\nu}{120(1-\nu^2)} \\
S_{18} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (40b^2 + 8a^2 - 8a^2\nu) \\
S_{19} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (20b^2 - 2a^2 + 2a^2\nu) \\
S_{20} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (10b^2 + 2a^2 - 2a^2\nu) \\
S_{21} &= \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)ab} (20b^2 - 8a^2 + 8a^2\nu) \\
P &= 0.03Etab
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) 西原 照雅・岩熊 哲夫・後藤 文彦：板の有限変位解析の一定式化，土木学会，第 55 回年次学術講演会講演概要集，I-A152, 2000.

- 2) SAKURAI, T., CHU, K. and NISHINO, F.: A numerical analysis of finite displacement problems of elastic shell structures, *Proc. of JSCE, Struct. Eng. / Earthquake Eng.* V. 3. No. 1, 1s-10s., 1986.
- 3) 桜井 孝昌・D. KARAMANLIDIS・西野 文雄：混合ハイブリッド有限要素法を用いた弾性シェル構造物の有限変位解析，構造工学論文集，V. 37A, 299-306, 1991.
- 4) SKALLERUD, B. and HAUGEN, B.: Collapse of thin shell structures-stress resultant plasticity modelling within a co-rotated ANDES finite element formulation, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* V. 46, 1961-1986, 1999.
- 5) 紙田 徹・近藤 恭平：梁の 3 次元大変形の有限要素法解析 (第 1 報)，日本航空宇宙学会誌 43 巻，335-345, 1995.
- 6) 紙田 徹・近藤 恭平：梁の 3 次元大変形の有限要素法解析 (第 2 報)，日本航空宇宙学会誌 43 巻，344-349, 1995.
- 7) 石原 昌文：梁の 3 次元大変形解析のための有限要素法定式化 (第 1 報)，日本航空宇宙学会誌 44 巻，691-697, 1996.
- 8) 石原 昌文：梁の 3 次元大変形解析のための有限要素法定式化 (第 2 報)，日本航空宇宙学会誌 44 巻，698-704, 1996.
- 9) Goto, Y., Li, X., Kasugai, T. and Obata, M.: Analysis of Greenhill problem by a co-rotational method, *J. of Struct. Eng.*, V. 41A, 411-420, 1995.
- 10) 後藤 文彦・小林 裕・岩熊 哲夫：オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析，構造工学論文集，V. 43A, 333-338, 1997.
- 11) 後藤文彦・小林 裕・齊木 功・岩熊 哲夫：空間固定三軸回りの回転自由度を用いた空間梁解析，応用力学論文集，V. 1, 319-327, 1998.
- 12) SHABANA, A. A. and CHRISTENSEN, A. P.: Three-dimensional absolute nodal co-coordinate formulation: plate problem, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, V. 40, 2775-2790, 1997.
- 13) T. Y. Yang 著，当麻 庄司・真柄 祥吾 訳：よくわかる有限要素構造解析入門，技報堂出版，1996.
- 14) ギャラガー著，川井 忠彦・川島 矩郎・中沢 優・藤谷 義信 訳：ギャラガー有限要素解析の基礎，丸善株式会社，1976.
- 15) O. C. ツィエンキー ヴィッツ著，吉識 雅夫・山田 嘉昭・山本 健二 訳：基礎工学におけるマトリクス有限要素法，培風館，1975.
- 16) 鷺津 久一郎・宮本 博・山田 嘉昭・山本 善之・川井 忠彦：有限要素ハンドブック I 基礎編，培風館，1981.
- 17) チモシェンコ・ギアー共著，長谷川 節 訳：弾性安定の理論 <上・下>，理工学海外名著シリーズ 16，ブレイン図書出版株式会社，1974.
- 18) Nolte, L. P.: On the derivation end efficient computation of large rotation shell models, finite rotation in structural mechanics 1985, *Lecture Note in Eng. Series 19, Springer-Verlag*, 1986.
- 19) 林 正・岩崎 英治：幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性，土木学会論文集，V.5, No.1, 327-334, 1988.