2020年注記：ウェブ版の方は、ときどき修正していますが、こちらの pdf 版の方は、修正していません。ちょっと修正して LaTeX でコンパイルし直したら、図などだいぶずれてしまいました。ウェブ版の方を参照して下さい。この pdf 版も一応、置いておきます。

10/5/17 版 (08/3/19 版から、応力によるモーメントのつりあいの式の間違いを訂正。訂正内容は html 版を参照)

目次

第 I 部

はじめに

1 印刷版テキストについて

この授業の正式のテキストはウェブ上の html 版 http://www.str.ce.akita-u.ac.jp/~gotou/kouzou/ とする。インターネット接続環境を日々の学習のために利用することが困難な人のために印刷版テキストも用意するが、印刷版テキストの内容は、あくまで印刷された時点の内容であることに注意しておいてほしい。ウェブ上の正式版テキストは、授業を進めながら、(例えば間違いやわかりにくい箇所を指摘されたりしながら) 随時、加筆修正される (例えば、当面の予定としては、手書きの絵を描画ツールによるきれいな絵に差し替えていくなどの修正がなされる)。また、ウェブ上の正式版テキストでは、関連語句、関連ウェブページなどにリンクを張りまくっているが、印刷版では、こうした機能は利用できない。

2 ウェブ版テキストの数式表示

ウェブ上の正式版テキストでは、ASCIIMathML (http://www1.chapman.edu/~jipsen/asciimath.html) というツールを使って数式を書いているが、Firefox (http://www.mozilla-japan.org/) というブラウザで表示することがでる。
Windows の IE でも MathPlayer (http://www.dessci.com/en/products/mathplayer/download.htm) というものをインストールすれば表示できる。

ちなみに (パソコンに興味のある人のために言っておくと)、印刷版テキストは、ウェブ版テキストの html ファイルを LaTeX ファイルに書き換えて pdf 化している。LaTeX ファイルもウェブ上に公開しているので、例えば、ウェブ版のファイル名 (hizumi.html とか) の拡張子を.tex に書き換え (hizumi.tex とか) れば、LaTeX ファイルをダウンロードすることもできる。html ファイルや LaTeX ファイルのソースの中身を見れば、ウェブ上に置いてある図ファイル (png や eps や fig や tex など) のありかも推測できるであろう。

3 参考文献・参考書など

- 構造力学関連講義ノート案：
  岩熊哲夫・小山茂『鬆徒労苦衷有迷禍荷苦痛– 計算機による構造解析の基礎としての構造力学を独習する』
  http://www.civil.tohoku.ac.jp/~bear/node16.html#sec00500a
  このウェブテキストのネタ本。
  私は、「力学教育 — 大学で何をどう教えるべきか — 研究討論会資料 — 構造工学委員会 力学教育研究に関する小委員会 (http://www.civil.tohoku.ac.jp/~bear/edu/edu1/toronkai.html) 」に示されている「構造力学」は連続体力学の近似理論のはずといった問題意識に共感するが、上記の構造力学関連講義ノート案では、正に連続体の力学にある種の仮定を設けて、構造力学が、力のつりあいやフックの法則といった物理法則から数学的な操作で演繹的に導出される過程が実に丁寧に解説されている。が、大学教養課程レベルの数学や物理 (特に前者) の基礎がしっかりできていない人にとっては、このノートの解説はやや難しいかも知れない。私がこのウェブ上のテキストで書こうとしていることは、実はこの

ノートの導出方法をそのまま踏襲しつつ、更に必要とされる数学の知識レベルを下げた解説ができないだろうかということである (やや厳しい部分もあるが、まあ、やれそうな範囲でやってみたい)。

- 四俵 正俊『よくわかる 構造力学ノート 』(技報堂出版)
  多くの構造力学の参考書は、上記の構造力学関連講義ノート案などとは違い、式の導出よりも問題の解法に特化しているものが多い。そして、なかば「公式」のように導入される式の物理的意味を導出結果からさかのぼるかたちで後付けで簡単に説明しているものが多いような気がする。そんな中で、上記の「よくわかる〜」は、(多くの学習書がそうやってなるべく詳述せずにごまかしている部分つまり) 学習者が「なんでそうなるの」とツッコミを入れたくなるような細かい部分に対して、(導出結果からさかのぼるかたちではあるものの) これでもかというほどに詳細な物理的、数学的な補足説明を加えている。そして、本筋の簡潔な説明の部分と詳細すぎる補足説明の部分とを明確に分けているので、読者は、自分が「つっこみたい」と思った部分だけ思う存分つっこんだ解説を読むことができる。まずは解法を「そういうもの」として一通りおさえ、「そういうもの」として納得がいかない部分についてだけ、つっこんで理解したいという人にはお薦めである。
- 鈴木 基行『ステップアップで実力がつく 構造力学徹底演習 – 基礎から応用まで 243 問・詳細解答 (単行本) 』(森北出版株式会社)
  徹底して、解法、演習に重点を置いた本。多種多様な問題を多種多様な解法で解いている。各種の試験対策として、また、ちょっと迷う問題をどう解くべきかを確認する際に有用である。

4 基本方針

- 次項を満たす範囲で、わかりやすくする (必ずしも簡単にするという意味ではない)
- 解法に特化しすぎないようにし、「なぜ解けるのか」を可能な範囲で示すように努める。つまり: たわみの微分方程式や軸応力と曲げモーメントの関係式などを、天下り的に「公式」として導入したり、せいぜい物理的意味を導出結果からさかのぼって後付けしたりという「省略」手法はできる限り避け、物理的な法則 (力のつりあいやフックの法則など) から数学的な操作で (演繹的に) 導出されるのだということを (大学教養課程の数学のレベルで) 可能な限り示すように努めたいと現時点では思っているけど、私の能力でそれが難しい議論 (エネルギー密度関数とかポテンシャルとか) が必要な話などは、深追いせずに適宜ごまかす場合もある。その際に必要になるであろうひずみ-変位関係の定義、応力やひずみのテンソル表示、断面 2 次モーメントや断面 1 次モーメントの意味や計算方法なども、できるだけごまかさずに解説する (他分野でも重要な概念、知識でもあるし)。
- たわみの解法は、(不静定も含めて) 微分方程式の境界値問題として解く方法を標準的な解法として解説し、(コンピューターや有限要素法が発達する前の時代に先人たちにより) エネルギー的考察や鶴亀算的考察に基づいて考案された多種多様な方法 (カスティリアーノの定理、弾性荷重法、単位荷重法、たわみ角法、重ね合わせの原理などなど) は、少なくとも標準的解法としては解説しない (公務員試験などの対策として、こういう場合はこういう方法だと早く解けるといった視点を入れるべきかどうか…)。

5 全体像

ひずみ-変位

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

梁モデルの仮定

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{xx} = 0$$
$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = 0$$
$$u_y = v + y\cos\theta - y$$
$$u_z = w + y\sin\theta$$

ひずみ-図心変位

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} - y\frac{d^2v}{dz^2}$$

応力-ひずみ (フックの法則)

$$\sigma_{zz} = E\epsilon_{zz}$$

応力-図心変位

$$\sigma_{zz} = E\left(\frac{dw}{dz} - y\frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

断面力-応力

$$M = \int_A y\sigma_{zz}dA$$

断面力-たわみ

$$M = -EI\frac{d^2v}{dz^2}$$

分布外力と断面力のつりあい

鉛直方向のつりあい

$$\frac{dS}{dz} + q = 0$$

モーメントのつりあい

$$\frac{dM}{dz} - S = 0$$

曲げのつりあい式

$$\frac{d^2M}{dz^2} + q = 0$$

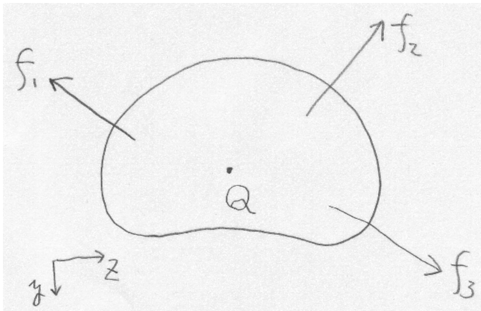
梁の支配微分方程式

$$-EI\frac{d^4v}{dz^4} + q = 0$$

第 II 部
構造力学 (準備開始)— まずは基礎 (の復習?)

6 力の分解・整理

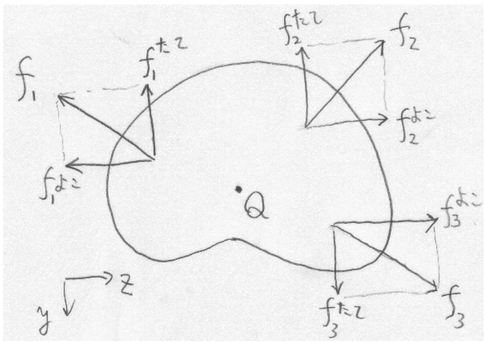
このテキスト上では、鉛直下方向を $+y$, 水平右方向を $+z$ とする yz 座標を使っていくことにする。こんなふうに小さい字で補足説明を書くことにする。梁の構造力学の座標の取り方には様々な流儀があるが、鉛直下向きのたわみ方向に $+y$ を取るのは一般的だし、梁軸方向は x 軸を取る流派が (2 次元問題では) 多数派だと思うけど、3 次元への拡張を考えた場合、梁軸が z 軸の方が何かと便利 (断面の断面 2 次モーメントの計算などを xy 座標で考えられる) なような気が (今のところ) するので、梁軸を z 軸にしておく。 物体 (まずは変形しない剛体ということにしておこう) にいろんな向きを向いたいろんな大きさの力がいくつも (簡単のため 3 つということにしておこう) 作用していたとする。このように、物体が外部から受ける力を外力と言う。こういう場合、2 次元の構造力学の問題では、話を簡単にするため、物体に作用する様々な力を、



- ある 1 点の鉛直方向に作用する 1 つの力
- ある 1 点の水平方向に作用する 1 つの力
- ある 1 点の左回りに作用する 1 つのモーメント

に置き換えてしまうという操作をやることがある。まずはこれを練習してみる。

図のような f_1, f_2, f_3 を Q 点に作用する y 方向の力、z 方向の力、左回りのモーメントに置き換えてみよう。まずは f_1, f_2, f_3 を図のようにそれぞれ $f_1^{たて}$ と $f_1^{よこ}$, $f_2^{たて}$ と $f_2^{よこ}$, $f_3^{たて}$ と $f_3^{よこ}$ というように鉛直方向成分 F_y と水平方向成分 F_z に分解してみる。まず y 軸方向の力の合計は、y 軸方向 (つまり下向き) が正なので、下を向いている力にはプラスをつけて、上を向いている力にはマイナスをつけてから足しあわせると



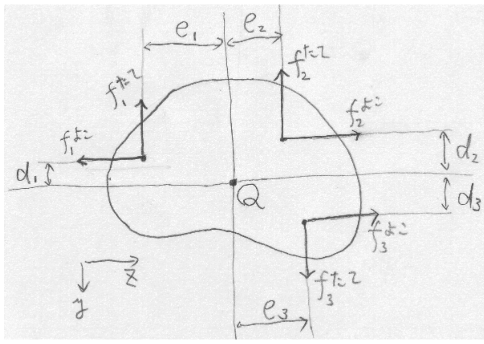
y 方向の力の合計: $F_y = (-f_1^{たて}) + (-f_2^{たて}) + (+f_3^{たて})$

となる。同様に z 軸方向の力の合計は、z 軸方向 (つまり右向き) が正なので、右を向いている力にはプラスをつけて、左を向いている力にはマイナスをつけてから足しあわせると

z 方向の力の合計: $F_z = (-f_1^{よこ}) + (+f_2^{よこ}) + (+f_3^{よこ})$

となる。もし、$f_{y1} = (-f_1^{たて}), f_{y2} = (-f_2^{たて}), f_{y3} = (+f_3^{たて})$ のように正負を軸の向きに合わせて定義すれば、$F_y = \sum f_{yi} = f_{y1} + f_{y2} + f_{y3}$ のように添字で演算できるように書くこともできる。

これらの y 方向の力の合計 F_y と z 方向の力の合計 F_z は、物体のどこに作用させるかで回転運動の仕方には違いが出てくるが、物体の重心に与える加速度は、点 Q に作用させてもどこに作用させても同じである。力を加えられた物体は、物体の重心の回りに回転しながら移動するが、もし力が重心にのみ加えられるなら回転せずに並進移動する。ということで、この F_y と F_z を点 Q に作用させて f_1, f_2, f_3 による並進運動を代表させることにすると、回転運動に関して f_1, f_2, f_3 による作用と同じ作用をする 1 つのモーメントを点 Q に作用させたい。回転運動に関して f_1, f_2, f_3 が作用している状態と同じ作用をする 1 つのモーメントを点 Q に作用させるためには、f_1, f_2, f_3 による点 Q の回りのモーメントを求めればよい。点 Q に作用している F_y と F_z は点 Q 回りのモーメントには関与しない。点 Q の回りのモーメントは、左回り (反時計回り) を正とすると、点 Q 回りに左回りになるモーメントにはプラスをつけて、点 Q 回りに右回りになるモーメントにはマイナスをつけて、たしあわせていくと、



点 Q 回りのモーメントの合計: $M = -f_1^{たて} e_1 + f_1^{よこ} d_1 + f_2^{たて} e_2 - f_2^{よこ} d_2 - f_3^{たて} e_3 + f_3^{よこ} d_3$

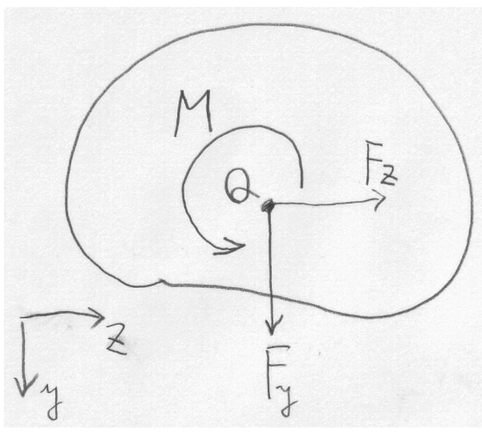
となる。モーメントの向きを (画面を見ている人から見て) 左回りにしたのは、右手系の x 軸 (画面を飛び出す向き) の右ねじまわりと一応は一致させておこうと思ったから。右手系では、モーメントは座標軸の右ねじまわりで定義されるのが一般的である (3 次元の x, y, z 軸回りの 3 つのモーメント M_x, M_y, M_z のうち、二次元で表現できるのは、画面に垂直な x 軸回りのモーメント M_x だけ)。仮に平面座標に x, y 座標を用いた場合、x が右向き正で、y が上向き正の (中学、高校まででは) 一般的な表記なら、右手系の z 軸は画面を飛び出す向きになるから、右ねじ回りの M_z は画面を見ている人にとっては反時計回りになる。構造力学などで、x は右向き正だけど y は下向き正みたいな座標を使うと、右手系の z は画面の中へ突き進む方向になるので、右ねじ回りの M_z は画面を見ている人にとっては時計回りになる。但し、構造力学で用いられる断面力としてのモーメントの向きは、後で詳しく述べるように右手系の向きとは関係ない (梁の曲がるの向きに関係する) ので留意すること。

以上より、f_1, f_2, f_3 を Q 点に作用する y 方向の力、z 方向の力、左回りのモーメントに置き換えてみると、図のようになる。但し、

$F_y = (-f_1^{たて}) + (-f_2^{たて}) + (+f_3^{たて})$

$F_z = (-f_1^{よこ}) + (+f_2^{よこ}) + (+f_3^{よこ})$

$M = -f_1^{たて} e_1 + f_1^{よこ} d_1 + f_2^{たて} e_2 - f_2^{よこ} d_2 - f_3^{たて} e_3 + f_3^{よこ} d_3$



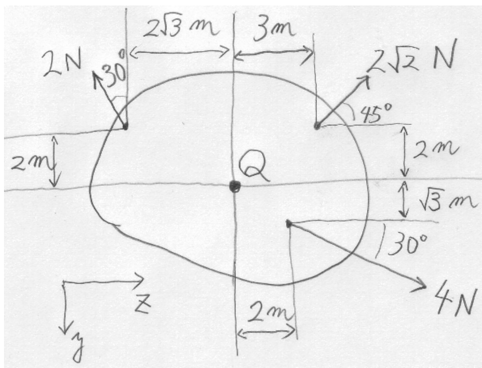
7　力のつりあい

上記の問題で、物体が静止している場合、そのまま静止し続ける (並進移動も回転移動も開始しない) 条件は、物体に作用している外力の合計がゼロになることである。これは、物体に力が作用しなければ物体は加速度を持たないという慣性の法則と捉えることもできるし、$F = ma$ の運動の法則で加速度 a が 0 と捉えることもできる (厳密にはこれら 2 つの法則の両方を必要とする結果と解釈すべき かも知れない が、構造力学ではこの辺の厳密な解釈は特に問題にはならない)。もちろん、力が加わらない物体でも等速度運動なら可能である。構造力学で扱うつりあいの問題は、静止している物体がそのまま静止し続けるような問題であり、静力学と呼ばれる。 すなわち、2 次元の問題では、
鉛直方向に静止し続ける条件: 鉛直方向の力の合計がゼロ
水平方向に静止し続ける条件: 水平方向の力の合計がゼロ
回転に対して静止し続ける条件: 任意の点についてのモーメントの合計がゼロ
の 3 つの条件が成り立っているとき、「つりあっている」という。これを上記の問題について具体的に書けば以下のようになる。

鉛直方向に静止し続ける条件: $F_y = (-f_1^{\text{たて}}) + (-f_2^{\text{たて}}) + (+f_3^{\text{たて}}) = 0$
水平方向に静止し続ける条件: $F_z = (-f_1^{\text{よこ}}) + (+f_2^{\text{よこ}}) + (+f_3^{\text{よこ}}) = 0$
回転に対し静止し続ける条件: $M = -f_1^{\text{たて}} e_1 + f_1^{\text{よこ}} d_1 + f_2^{\text{たて}} e_2 - f_2^{\text{よこ}} d_2 - f_3^{\text{たて}} e_3 + f_3^{\text{よこ}} d_3 = 0$

7.1　練習問題 1

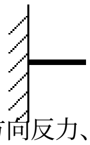
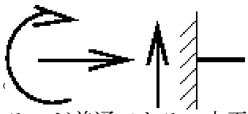
図のような物体に作用する 3 つの力を Q 点に作用する y 方向の力、z 方向の力、左回りのモーメントに置き換えてみよう。



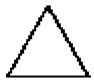
8　支承（ししょう）

上の章 は、空中に浮いている物体の話だけど、土木で対象とする一般的な構造物は、地面や崖 (壁) とくっついている。構造物を地面や壁とくっつけて固定することを「支持する」というけど、支持するために構造物と地面や壁をくっつけている装置を支承（ししょう）という。支承を構造力学でモデル化する場合には、構造物と地面 (や壁) と支点と呼ばれる 1 つの点でつなげて支持していると考える。支点にどのような力 (反力) が生じるかによって、支承にはいくつかの種類がある。反力については、下で改めて解説するが、ここでは、支点が構造物から受けた力の反作用力と考えておいてほしい。

8.1　固定支承

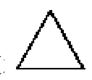
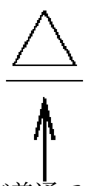
梁などが (剛体とみなせるほどに) 堅い壁に埋め込んであるのをモデル化したのは固定支である (梁の場合には固定端とか埋め込み端とも呼ばれる)。固定支承には、鉛直方向反力、水平方向反力、モーメント反力が生じる鉛直方向反力は (土木構造物では上向き反力を生じるのが一般的なので) 上向き正で与えられるのが普通である。水平方向反力は、右方向 (梁の軸に沿って取った座標方向) を正とする場合と梁の軸力の引張または圧縮に対応させて正負を決める場合とがあるだろう。このテキストでは梁の水平方向反力が生じる問題はそれほど多くは扱わないが、出てきたときに反力の正の向きを定義することにする。モーメント反力の向きは、梁の下側が引張になる向きを正にするのが一般的であろう。すると、両端固定の梁の場合、左端のモーメント反力は右回りで、右端のモーメント反力は左回りということになるが、この辺の話は内力の向きのところで改めて詳述する。

8.2　ヒンジ支承

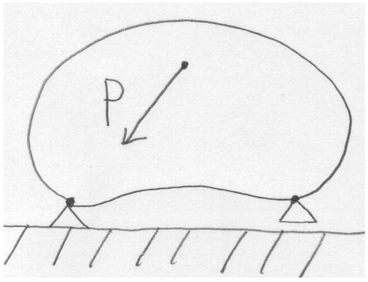
モーメント反力が生じないように構造物を支持している点が回転できるようにしたのがヒンジ支である。ピン支承とか回転支承とかとも言う。三角形の積木のてっぺんのとんがったところに、構造物がのっかるイメージである。(水平な地面に設置された) ピン支承には鉛直方向反力と水平方向反力が生じる。

鉛直方向反力は (土木構造物では上向き反力を生じるのが一般的なので) 上向き正で与えられるのが普通である。水平方向反力は、右方向 (梁の軸に沿って取った座標方向) を正とするのが一般的である。

8.3　ローラー支承

ピン支承の水平方向反力 (支承が傾いた地面や壁に設置される場合を考慮するなら、設置面に平行な反力) が生じないように、支承が設置面に平行に移動できるようにしたのがローラー支である。移動支承ともいう。三角形の積木の下にローラーが取り付けてあって、積木が地面に対して水平に移動できるというイメージである。(水平な地面に設置された) ローラー支承には鉛直方向反力のみが生じる鉛直方向反力は (土木構造物では上向き反力を生じるのが一般的なので) 上向き正で与えられるのが普通である。

9　反力



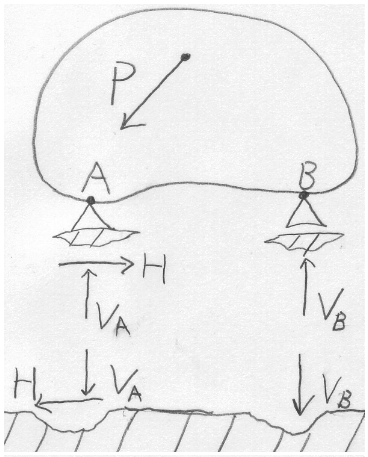
自重を無視できる物体が、図のようにヒンジ支承とローラー支承で地面に支持されていて、外力 P を受けているとする。このとき、支点に生じる反力を求めたい。

反力というのは、支点が支持している物体から受ける力の反作用力であるが、支点が物体から受ける力と反力とを一つの絵の中に一緒に書くと (中学や物理の教科書では正にそういう書き方がされていて私は混乱したものだが) わかりにくいので、支点部分を地面から切り取って考えることにすると、空中に浮いている物体の支点部分に、外力が作用していて、物体は静止し続けている (つりあっている) と考えることもできる。物体や地面や壁を切り取った場合、切り取った面 (切断面) には、作用・反作用の法則により逆向きで大きさの等しい力がそれぞれ作用している。このうち、空中に浮かぶことになった支点の側の切断面には、 支承 の章で定義された支承の種類に応じた反力が作用していると考えればよい。

つまり、支点反力というのは、「空中に浮いている物体が静止し続けていられるように支点に作用する外力」と考えることもできるし、「支点直下の地面を切り取ったときに、その切断面に作用する内力」と考えることもできる。この辺の考え方は、内力の説明のところで改めて解説する。

力の分解・整理 の章の要領で、外力 P をたて方向成分 $P_{たて}$ とよこ方向成分 $P_{よこ}$ に分解する。この物体は支点で地面につなぎとめられた「静止し続ける」物体だから、 力のつりあい条件 から次の 3 式がなりたつ。

鉛直方向のつりあい (下向き正): $(+P_{たて}) + (-V_A) + (-V_B) = 0$
水平方向のつりあい (右向き正): $(-P_{よこ}) + (+H) = 0$
A 点回りのモーメントのつりあい (左回り正): $+P_{よこ}d - P_{たて}e + V_B f = 0$

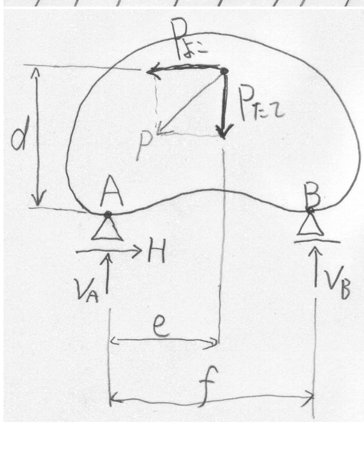


このように二次元の力のつりあい条件は 3 本の式で表されるので、未知数となる反力が 3 個であれば、力のつりあい条件のみから反力を求めることができる。

例えば、上の例では、

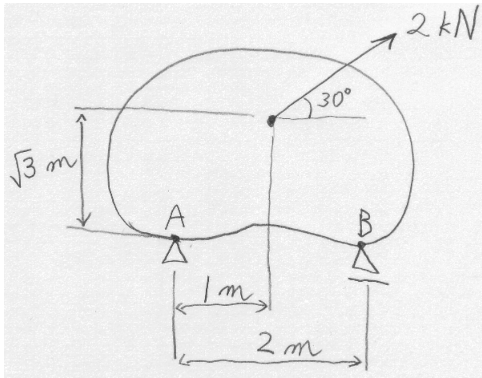
$H = P_{よこ}$
$V_B = \frac{P_{たて}e - P_{よこ}d}{f}$
$V_A = \frac{P_{たて}(f-e) + P_{よこ}d}{f}$

と求まる。このように、力のつりあい条件のみから反力 (や部材の内力) を求めることができる構造物を静定構造物という。これに対して、力のつりあい条件のみからは反力や内力が求まらない構造物は不静定構造物といい、力と変形の関係や変形と変位の関係を用いないと反力や内力が求まらない。構造物の反力の数から力のつりあい式の数を引いた数を不静定次数と呼ぶ。つまり、上の例のような反力の数が 3 つで、力のつりあい式の数も 3 つの静定構造物の不静定次数は 0 である。静定梁にヒンジ



(回転する節点) をはさみながらローラー支承を増やしたゲルバー梁の場合、ローラー支承が増えたぶんだけ反力は増えるが、ヒンジの左側 (または右側) でモーメントの合計が 0 というつりあい式もそのぶん増えるので、反力が 4 つ以上あっても、不静定次数が 0 であれば静定構造物となり得る。

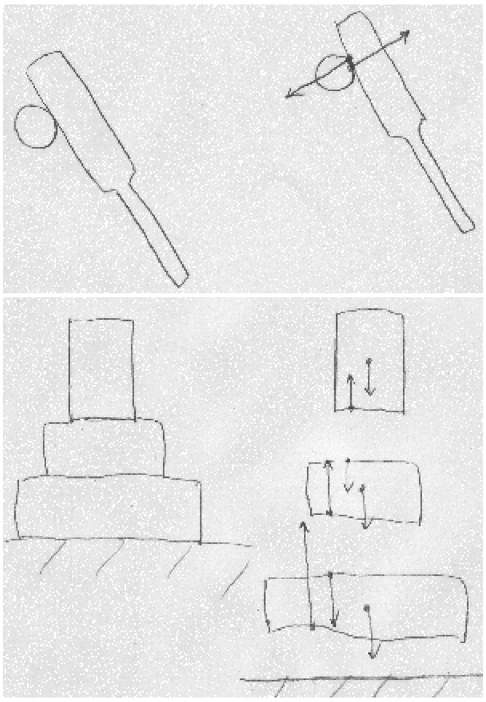
9.1　練習問題 2



図の支点 A, B の支点反力を求めてみよう。

10　挿話: 外力と内力の混乱

私は中学の理科でも高校の物理でも、物体に作用する力というのがよく分からなかった。例えば、中学のときにこんな問題を出された。図のようなラケットがピンポン玉を打ち付けている絵の中に「作用する力を書き入れよ」みたいな問題ではなかったかと思う。で、正解はどんなものだったかよく覚えていないのだが、確か、ラケットがピンポン玉を押す力とその反作用力としてピンポン玉がラケットを押し返す力は書き入れるべき「作用する力」だったと思う。その他にもラケットをにぎる手との関係もあったかも知れない。そして、力の作用点もラケットとピンポン玉の重心あたりに書かれていたかも知れない。で、私はその正解を見ても、まるで理解できずに混乱しまくっていた。というのは、ラケットに接着剤がついていて、ピンポン玉を打った瞬間にラケットとピンポン玉がねっぽって一体化したらどうなるのだろうかと考えたら、なにがなんだか分からなくなってしまった。



高校のときには、こんな問題を出された。図のように墓石 (だったかなあ?) が 3 段ぐらい重なっているとき、それぞれの墓石に作用する力をすべて書き入れよというような問題だったと思う。そのときの先生は墓石を切り離してばらばらにするとわかりやすくなると言っていて、ばらばらの墓石に、それ自身の自重や、上の墓石から押される力や、それらにより下の墓石から押し返される反作用力などなどを書き入れたものが正解だったような気がするが、この正解も (理解できなかったので) よく覚えていない。このときも同様に、接着剤で墓石どうしをねっぽしてしまったらどうなるのか? とか、墓石の途中を切って分割したらどうなるのか? ということを考えてしまうと、どうしてそんなふうに都合よく、たまたま墓石どうしのさかいめに作用している上からの重さと下からの反作用力が、それぞれの墓石に作用していることになるのか、さっぱり訳がわからなくて混乱していた。

ちなみに、最近の中学の教科書 例えば『理科 I 分野上』〜実験から自然のしくみを見つける〜(教育出版株式会社、平成 18 年 1 月 10 日発行) には、図のように机の上に本がのった写真で、重力と抗力がつりあうことが説明されている。重力と抗力を左右にずらして書き入れると (上の墓石の絵が正にそうだけど)、モーメントがつりあわなくなってしまうので、抗力の方を太くして、重力と一直線上に書き入れるという工夫をしているのだろう。それはともかく、机の上にのっているのが本だったりすると、やはり、私は、この本の 135 ページ目と 136 ページ目の間には、同じように 135 ページぶんの

重力と抗力とが作用していないのだろうかとか、本と机を接着剤でくっつけたらどうなるのだろうかと考えてしまう。

最近の高校の教科書の例として『物理 I』(東京書籍、平成 18 年 2 月 10 日発行) を見てみると、重力 (地球がみかんを引く力) と引力 (みかんが地球の中心を引く力) が作用・反作用の関係にあり、みかんが手のひらを押す力と手のひらがみかんを押す力が作用・反作用の関係にあり、つりあっているのは、重力と手のひらがみかんを押す力という説明になっている。手のひらがみかんを押す力は、みかんが手のひらを押す力の反作用力であって、重力の反作用力ではない (重力の反作用力は引力だ) ということを厳密に説明しようとしているのだろうと思う。でも、この図でも「接着剤のパラドックス」は免れない。手に接着剤がついていてみかんとねっぱってしまったらどうなるのだろうか? みかんのまんなかあたりに水平に切り目を入れたらどうなるのだろうか?

もちろん、どこがくっつこうが、どこが切り離れようが、作用している力に変わりはない筈だ。なんか、物体と物体の境目に着目してそこに作用する力だけをピックアップするのが暗黙の了解になっていないだろうか。そのせいで中学、高校時代の私は混乱しまくっていた訳だが、構造力学においては、自分で着目したい部分を意識的に切断して二つの部分に切り離し、切り離されたそれぞれの系についてつりあいを考えるという操作を行う。大学でこのやり方を教わって、ようやく私は中学や高校時代の物体と物体の境目に作用する力をどう扱えばいいのかが分かった。物体と物体とを接着剤でくっつけたとしても、その境目に作用する力は (他の任意の場所で切断した場合と同様に) 「内力」として考えてやればいいのだ。

『理科 I 分野上』〜実験から自然のしくみを見つける〜(教育出版株式会社、平成 18 年 1 月 10 日発行)p.30 の図

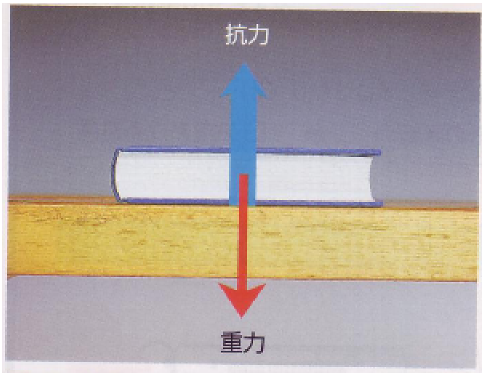
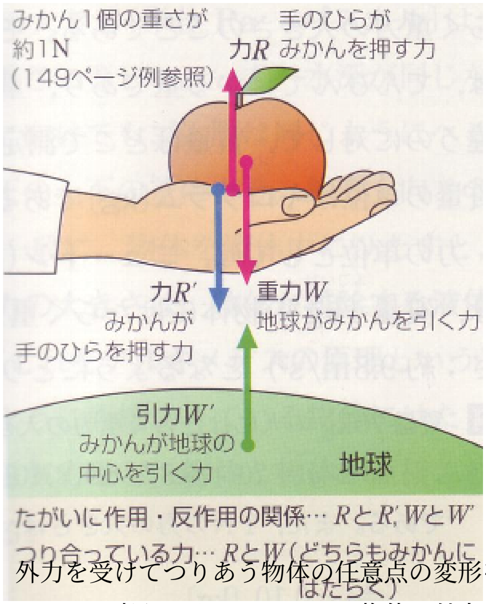


図42 抗力

『物理 I』(東京書籍、平成 18 年 2 月 10 日発行)p.150 の図

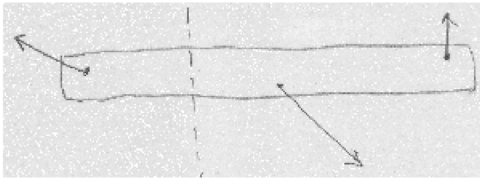


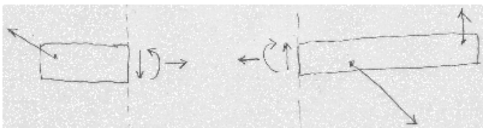
11 内力

実際の物体は外力を受けると変形してつりあっている。さて、外力を受けてつりあう物体の任意点の変形を求めたい場合、外力と変形とをいきなり関係づけようとすると、なかなか考えにくい。そこで、物体に外力が作用すると、物体の内部に外力とつりあうような「内力」という抵抗力が発生すると考える。すると、「内力」と変形との関係はフックの法則のような材料の特性として与えることができるので、「内力」を仲介にして外力と変形とを関係づけることができるようになるのである。

以下に梁の内力を定義する。「梁」の定義については、後で改めて解説するが、ここでは細長い (と見なせる) まっすぐの棒ぐらいに考えておいてほしい。今、この棒にいくつかの外力が作用して空中でつりあっているとする。

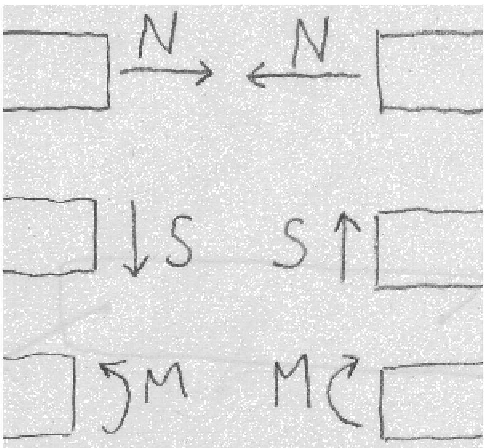
この棒の適当なところを棒の軸線に直角な面で切り、棒を二つの部分に切り離してみる。

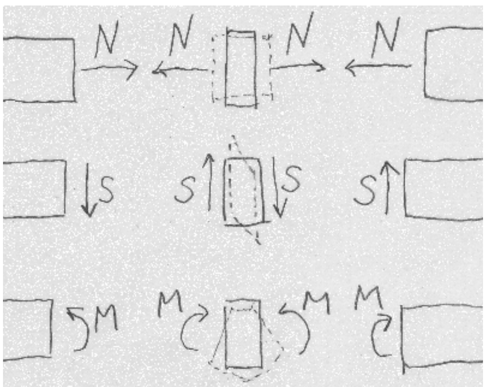




まずは切り離された左側の部分について考えてみる。棒は切り離される前は、外力とそれによるモーメントの合計がゼロになってつりあっていたが、切り離されてしまうと、切り離された部分に作用する外力だけではつりあいが成り立たなくなってしまう。そこで、切り離されたことによってできた切断面に、切り離された部分だけでつりあうような力が作用していると考えてやる。切り離された部分がつりあいを満たすように切断面に作用させる力は、任意の与え方ができるが、扱いやすくするため、切断面の重心に作用する次の 3 つの力として与えることにする。

軸力: 切断面に垂直な (軸方向の)1 つの力
せん断力: 切断面に平行な 1 つの力
曲げモーメント: 切断面に作用する 1 つのモーメント





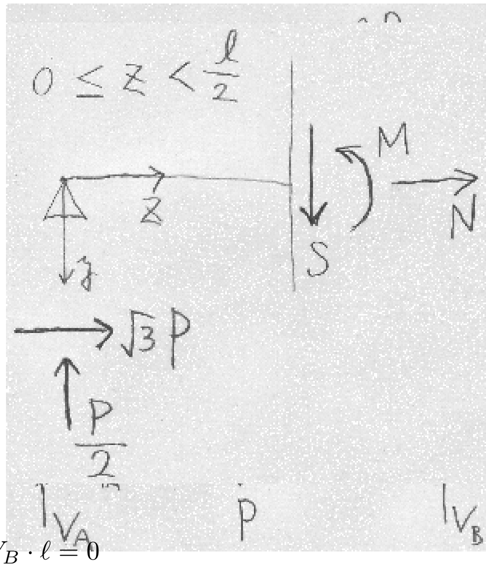
これらの力は、物体を仮想的に切断したことにより、(つりあいを満たすために) 仮想切断面に作用する力という意味で「内力」という。梁部材に限らずこのように物体の内部に作用していると考える力は内力であるが、梁部材に限定した場合、その断面に作用する上記の 3 つの力は「断面力」ともいう。さて、ここまでは切り離された左側の部分について述べてきたが、切り離された右側の部分の切断面についても、右側の部分が外力とつりあうように同様に断面力が作用する。左側の部分の右端の切断面に作用する断面力と右側の部分の左端の切断面に作用する断面力とは、**作用・反作用**の関係により互いに向きが反対で大きさが等しい力となる。例えば、左側の部分の右端の切断面に作用する軸力と右側の部分の左端の切断面に作用する軸力は向きが逆で大きさが等しいので、切断面どうしをくっつけると、切断面に作用する軸方向の力の合計はゼロになり、切断面に外力としては軸方向の力は作用していないことになる。せん断力や曲げモーメントも同様で、**切断面どうしをくっつけてやると、内力の合計はゼロになり、くっついた切断面には、切り離される前の状態と同じようになにも外力は作用していないことになる。**

構造力学で使われる断面力の正の向きは座標の正の向きではないので、注意が必要である。 切断面における作用・反作用の関係が分かりやすいように、左側の切断面と右側の切断面とでは正の向きを逆に定義している。このように定義した方が、「向きは同じだけど符号が逆」と定義されるよりも視覚的には考えやすい。但し、コンピューターで大量の変位自由度を扱うマトリクス法などの有限要素解析の「節点力」においては、力の向きと座標の向きが一致していた方が便利なので、「向きは同じだけど符号が逆」の扱いになる。

軸力 N の正の向きは梁が引張を受ける向きである。せん断力 S の正の向きは、左側部分の右端の切断面では下向きが正、右側部分の左端の切断面では上向きが正である。曲げモーメントの正の向きは、梁の下側が引張側となる向きが正である。

これらの断面力の正の向きと具体的な変形の向きとの対応は、切断位置に微小要素を介して、3 つの部分に切り分けて考えるとわかりやすいかも知れない。真ん中の微小部分は、正の軸力を受けると左右に引っ張られて伸び、正のせん断力を受けると左の面は持ち上げられて右の面は持ち下げられてせん断変形し、正の曲げモーメントを受けると上側が圧縮され、下側が引張られる。

12　断面力の計算



図のような簡単な例題について、梁の軸上の任意点の軸力、せん断力、曲げモーメントを求めて、それらを図示するまでの基本的な手順をやってみる。

梁の基礎的な問題の場合は、外力として鉛直荷重しか作用しない問題が多いが、斜め方向の荷重が作用している場合は、作用点に作用する鉛直方向の力と水平方向の力とに分解してやる。 支承 のところで説明したそれぞれの支承の種類と反力の正の向きに注意して、支点 A に作用する鉛直反力を V_A, 水平反力を H_A, 支点 B に作用する鉛直反力を V_B とする。 力のつりあい から

鉛直方向のつりあい (下向き正): $(-V_A) + (+P) + (-V_B) = 0$
水平方向のつりあい (右向き正): $(+H_A) + (-\sqrt{3}P) = 0$
支点 A まわりのモーメントのつりあい (左回り正): $-P \cdot \frac{\ell}{2} + V_B \cdot \ell = 0$

の 3 式がなりたつ。未知数は V_A, V_B, H_A の 3 個だから式が 3 個あれば解くことができて、

$H_A = \sqrt{3}P$
$V_B = \frac{P}{2}$
$V_A = \frac{P}{2}$

と求まる。

任意点の断面力を座標の関数として求めるには、座標を決めなければならない。梁の左端の点を原点とし、軸に沿って右向きに z 軸を、下向きに y 軸を取る (y, z 軸をこの向きに取る理由については 力の分解・整理 参

照)。断面力を求めるには、梁を適当な断面で切り離して考える。まず、外力の作用点よりも左側の $0 \le z \le \frac{\ell}{2}$ の任意点で梁を左右に切り分け、切り分けられた左側の部分と右側の部分とでは、左側の部分の方が作用している力が少なくて考えやすそうなので、左側の部分だけ取り出して考えることにする (もちろん、右側部分だけ取り出して考えても求まる断面力は同じである)。 断面力の正の向き に注意しながら、切断面に軸力 N, せん断力 S, 曲げモーメント M を書き入れ、力のつりあいを考える。

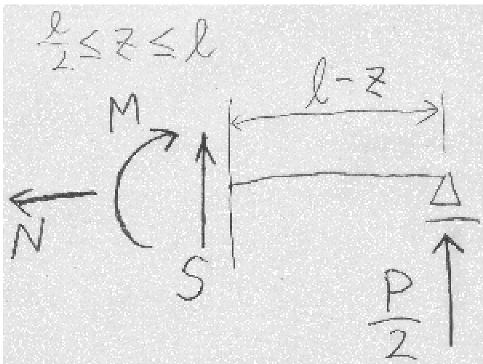
鉛直方向のつりあい (下向き正): $(-\frac{P}{2}) + (+S) = 0$
水平方向のつりあい (右向き正): $(+\sqrt{3}P) + (+N) = 0$
支点 A まわりのモーメントのつりあい (左回り正): $-Sz + M = 0$

モーメントのつりあいは、支点まわりで考えても切断点まわりで考えてもどこで考えても構わないので、作用する力が少なくなる点で考える。未知数が N, S, M の 3 個で式が 3 個だから解くことができて、

$S = \frac{P}{2}$
$N = -\sqrt{3}P$
$M = \frac{P}{2}z$

と求まる。

次に、外力の作用点よりも右側の $\frac{\ell}{2} \le z \le \ell$ の任意点で梁を左右に切り分け、切り分けられた左側の部分と右側の部分とでは、右側の部分の方が作用している力が少なくて考えやすそうなので、右側の部分だけ取り出して考えることにする (もちろん、左側部分だけ取り出して考えても求まる断面力は同じである)。 断面力の正の向き に注意しながら、切断面に軸力 N, せん断力 S, 曲げモーメント M を書き入れ、力のつりあいを考える。



鉛直方向のつりあい (下向き正): $(-S) + (-\frac{P}{2}) = 0$
水平方向のつりあい (右向き正): $(-N) = 0$
切断点まわりのモーメントのつりあい (左回り正): $-M + \frac{P}{2}(\ell - z) = 0$

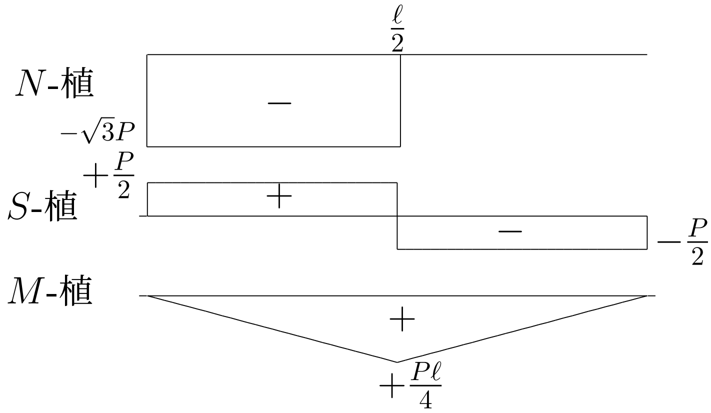
未知数が N, S, M の 3 個で式が 3 個だから解くことができて、

$S = -\frac{P}{2}$
$N = 0$
$M = \frac{P}{2}(\ell - z)$

と求まる。

13　断面力図

断面力図というのは梁軸を横軸にとった断面力のグラフのことで、軸力図を N-図、せん断力図を S-図 (とか Q-図)、曲げモーメント図を M-図という。軸力図やせん断力図の縦軸は上を正にするのが普通だが、曲げモーメント図だけは、下を正にする方が一般的なので、このテキストでも曲げモーメント図の縦軸は下を正にする。こうすると、下向きを正とする梁のたわみ曲線の下に凸か上に凸かと曲げモーメント図の正負の方向が対応するので感覚的にわかりやすい。

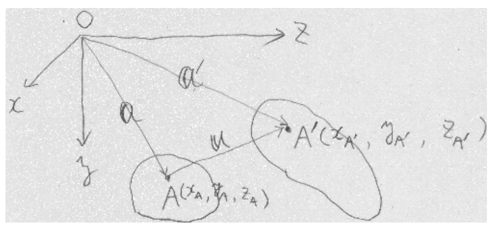


第 III 部

ひずみ–変位関係

14　変位ベクトル

物体に外力が加わると物体は移動したり変形したり (曲がったりゆがんだり) する。物体の変形量を表す準備として、まずは物体の中の任意の点の移動量を表す方法から説明する。今、まだ外力を受けずに変形していない物体 (この状態を初期状態と呼ぶ) の中のある点 A に印を付けた後に外力を加えたら、物体は変形しながら移動し、印をつけたところが点 A' のところまで移動してつりあって静止したとする。



点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a} = (x_A, y_A, z_A)$,

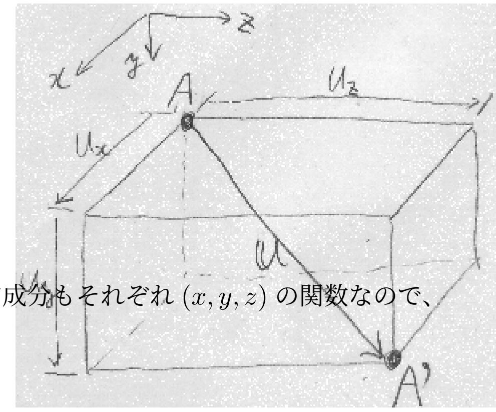
点 A' の位置ベクトルを $\boldsymbol{a'} = (x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ とする。

このテキストでは、ベクトルや テンソル (後述) は、$\boldsymbol{a}$ のように太字で表すことにする。手書きする場合は、文字の一部を二重線で書くこととし、$\vec{a}$ みたいにいちいち矢印を付ける表記は使わない。さて、最初、点 $A(x_A, y_A, z_A)$ にあった点が、物体が外力を受けて変形・移動した後に、どの位置まで動いたかという移動量を、**変形・移動前の座標値** (x_A, y_A, z_A) **の関数として**

$$\boldsymbol{u}(x_A, y_A, z_A) = \boldsymbol{a'} - \boldsymbol{a}$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{u}$ で表し、これを点 A の変位ベクトルと呼ぶ。もちろん、ここでは点 A の変形・移動後の点 A' の座標値も与えてしまっているから、$\boldsymbol{u}(x_A, y_A, z_A) = \boldsymbol{a'} - \boldsymbol{a} = (x_{A'} - x_A, y_{A'} - y_A, z_{A'} - z_A)$ のように書けてしまうけど、普通の構造力学の問題では、初期状態における点 A が、変形後にどこに移動するのかは (問題を解いてみるまでは) 分からないので、点 A の移動量を移動前の点 A の座標値の関数として与えると便利なのである (流体とかの問題だとまた事情が違ってくる)。

変位ベクトル u の x, y, z 方向成分は、



$$\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

と表せるが、u_x は x 方向変位、u_y は y 方向変位、u_z は z 方向変位と呼ぶ。任意点 (x, y, z) の変位ベクトルは、(x, y, z) の関数として $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ と表せるが、その x, y, z 方向成分もそれぞれ (x, y, z) の関数なので、

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = (u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z))$$

と表せることになる。

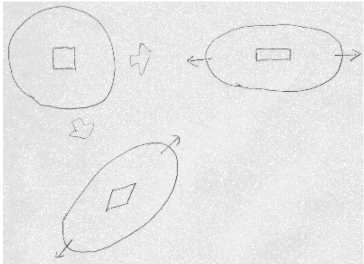
1 次元ベクトル

x 方向変位 u_x, y 方向変位 u_y, z 方向変位 u_z は、x, y, z の関数であるから、ある点の (x, y, z) を代入すると 1 つの数値 (移動距離) を取るが、正の値の時はそれぞれ x, y, z 軸の正の方向への移動距離を表すし、負の値の時はそれぞれ x, y, z 軸の負の方向への移動距離を表すから、1 つの軸上で正か負かの向きの区別がある 1 次元ベクトルと見なせる。だから、このテキストの中で u_x, u_y, u_z を図示する際には、移動距離が正になる方向に矢印をつけてベクトル的に図示するが、1 次元ベクトルは、あくまでスカラー (後述) なので、数式として書く場合は太字では書かない。

剛体変位

ここで、物体の「変形・移動」というような書き方をしているが、「変形」と「移動」というのは同じではない。物体に外力が加わって、物体全体としての位置はほとんど「移動」せずにその場でぐにゃっと曲がったりゆがんだりして「変形」することもあれば、物体全体の形は「変形」せずに、位置がすごく離れた場所まで「移動」することもある。「変位」というのは、物体の変形・移動前後の点の移動量を表しているが、その移動量の中には、変形成分も移動成分も含まれている。全く変形しない (と仮想的に考えた) 物体を剛体というが、剛体は外力を受けても変形はせずに移動しかしない。そのような純粋な移動だけからなる変位は「剛体変位」と呼ばれる。

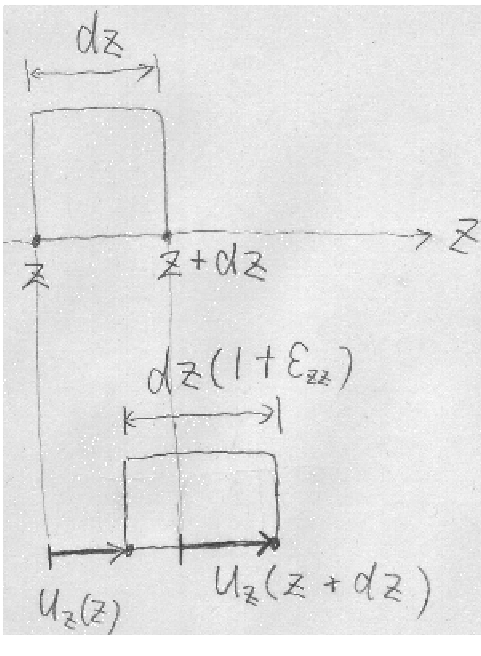
15　伸び縮み変形とせん断変形



これから、物体内部の変形を、物体中の点の座標値との関係で (変位ベクトルを使って) 表していこうとしているのだけど、それにさきだって、まず、物体の中に各辺が座標軸と平行な微小な立方体 (2 次元なら正方形) の要素を考えて、その四角い要素がどのように変形するかということに着目してみる。簡単のため 2 次元で考えるとして、例えば、図のような物体が左右に引っ張られたとして、微小正方形要素の周辺が z 軸方向には一様に伸び、y 方向には一様に縮んだとすると、正方形要素は、頂点の直角を保ったまま長方形に変形する。このように、物体中の微小な立方体 (2 次元なら正方形) 要素が、頂点の直角を保ちながら、直方体 (2 次元なら長方形) に変形するような変形を、ここでは「伸び縮み変形」と呼んでおく。一方、図のような物体を微小正方形の対角線方向に斜めに引っ張ったら、微小正方形要素は、頂点の直角がくずれて、ひし形に変形するだろう。このように物体中の微小な立方体 (2 次元なら正方形) 要素が、(辺の長さは変えずに) 頂点の角度を変えるような変形を「せん断変形」と呼ぶ。すると、これ以外の一般的な変形 (図の微小正方形が不等辺の平行四辺形になるような) も、「伸び縮み変形」と「せん断変形」の組合せとして表せそうだ。

上の例では、微小正方形要素の各辺が座標軸と平行になるような要素を考えることにしたが、もし微小正方形要素を 45° 回転させたら、今度は、左右に引っ張るとせん断変形して、右上と左下の斜め方向に引っ張ると伸び縮み変形するようにもできる。つまり、伸び縮み変形とかせん断変形というのは、どの座標系で観測するかに依存して変わってくるものであるし、逆に言うと、どんな変形状態でも伸び縮み変形として捉えることのできる向きがあることになる (この辺の話は「主ひずみ」の話をする機会があれば後述)。

16　伸び縮み変形



さて、物体中の微小正方形要素が、各頂点の直角を保ちながら長方形に変形する 伸び縮み変形 の変形量を 変位ベクトル の成分を使って表してみる。今、初期状態の物体の中に 2 辺が y, z 軸に平行で、一辺の長さが dz の微小正方形要素を考える。物体が外力を受けて変形・移動したら、この正方形要素が z 軸方向に伸びて、初期状態の 1 辺の長さが dz から z 方向に $1 + \varepsilon_{zz}$ 倍 長くなったとすると、この ε_{zz} を z 方向の「**伸びひずみ**」と言うのだけど、この伸びひずみ ε_{zz} を、z 方向変位 u_z を使って表したい。初期状態の正方形の左下の点の座標が z だったとすると、初期状態の正方形の右下の点の座標は $z + dz$ になる。微小要素の左下の点の z 方向変位は初期状態の座標値 z の関数として $u_z(z)$ と表され、微小要素の右下の点の z 方向変位は初期状態の座

標値 $z+dz$ の関数として $u_z(z+dz)$ と表される。これらを使って変形後の微小要素の z 方向の長さ $dz(1+\varepsilon_{zz})$ を表してみると、

$dz(1+\varepsilon_{zz}) = dz + u_z(z+dz) - u_z(z)$

と書ける。これを変形すると、

$\varepsilon_{zz} = \frac{u_z(z+dz)-u_z(z)}{dz}$

と書けるが、これは dz がじゅうぶんに微小だという仮定のもとでのひずみのおおざっぱな定義である。微小要素の 1 辺の長さ dz を極限まで小さくしてやるとこれは「微分」の定義になるので、ある点 (x,y,z) の z 方向の伸びひずみは次式のように z 方向変位の z に関する微分として定義できる。

伸びひずみの定義

$$\varepsilon_{zz}(x,y,z) = \lim_{dz\to 0}\frac{u_z(z+dz)-u_z(z)}{dz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

同様にある点 (x,y,z) の x 方向の伸びひずみ ε_{xx} は x 方向変位の x に関する微分として、y 方向の伸びひずみ ε_{yy} は y 方向変位の y に関する微分として、

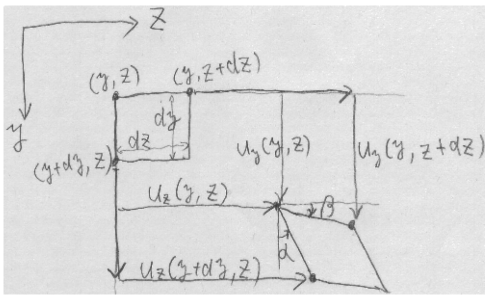
$\varepsilon_{xx}(x,y,z) = \frac{\partial u_x}{\partial x}$

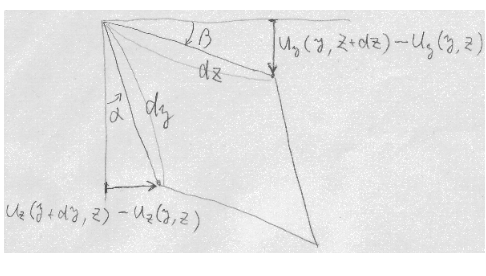
$\varepsilon_{yy}(x,y,z) = \frac{\partial u_y}{\partial y}$

と定義できる。

微分を偏微分で書いたのは、u_z などの変位成分は、実際には x,y,z の関数だからである。だから、厳密には $u_z(z+dz)$ とかも、$u_z(x,y,z+dz)$ みたいな書き方をすべきだろうが、z 軸に平行な軸の 1 次元上の議論では、x,y は常に同じ値なので省略した。今後も、簡単のため適宜、このような省略を行うことが多々ある。

17 せん断変形





初期状態の物体の中にあった微小な長方形要素が、物体が外力を受けて変形・移動したら、図のように 2 辺の長さ (縦が dy, 横が dz) を変えずに、頂点の角度が変わって平行四辺形になったとする。正方形要素ではなく長方形要素にしたのは、回転量を定義するときに縦横の区別がないと不都合だから。

さて、もともと直角だった長方形要素の左上の頂点の角度が、どれだけの角度だけつぶれたのかを変位ベクトル (各

頂点の y, z 方向変位) を用いて示したい。角度が小さいときは、$\sin\theta \cong \theta$ となることから、

$\alpha \cong \sin\alpha = \frac{u_z(y+dy,z)-u_z(y,z)}{dy}$

$\beta \cong \sin\beta = \frac{u_y(y,z+dz)-u_y(y,z)}{dz}$

と書ける。微小要素の 2 辺の長さ、dy, dz を極限まで小さくしていけば、これは「微分」の定義になるので、ある点 (x, y, z) (を左上の頂点とする微小長方形要素) の角度変化 α と β は、それぞれ z 方向変位の y に関する微分、y 方向変位の z に関する微分として次のように定義できる。

$$\alpha(x,y,z) = \lim_{dy\to 0} \frac{u_z(y+dy,z)-u_z(y,z)}{dy} = \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

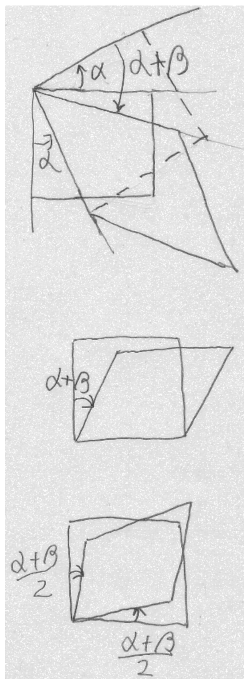
$$\beta(x,y,z) = \lim_{dz\to 0} \frac{u_y(y,z+dz)-u_y(y,z)}{dz} = \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

微分が偏微分になっているのは、x, y, z の関数である u_z や u_y を y だけの関数とみなして微分したり、z だけの関数とみなして微分したから。

さて、角度変化 α と β は、初期状態で直角をなしていた 2 辺が、それぞれ内側にどれだけつぶれたかを示している訳だけど、α か β の単独では、それが実質的な角度変化を表しているのかどうかは分からない。例えば、図のように、長方形要素が最初 α だけ剛体的に回転して (このような回転に関する「 剛体変位 」を「剛体回転」という)、そのあとに上の辺の側だけが $\alpha + \beta$ だけつぶれて実質的な変形をしたのかも知れない (もちろん、最終状態が同じになるような剛体回転と実質変形の組み合わせはこの他にもいくらでも考え得る)。 つまり、初期状態で直角だった角度がどれだけ実質的につぶれたのかを表すには、$\alpha + \beta$ のように 2 辺の内側へのつぶれ具合を表す角度の足し算にする必要があるようだ。

工学せん断ひずみ

この $\alpha + \beta$ のことを工学せん断ひずみと呼び、記号としては γ などを用いる。 この実質的な角度変化量 $\alpha + \beta$ を 2 辺が同じ角度だけ内側に変形してつぶれたように振り分けるなら $\frac{\alpha+\beta}{2}$ となるが、**$\frac{\alpha+\beta}{2}$ のことをせん断ひずみと呼び、 記号としては、 yz 面のせん断変形を表すせん断ひずみなら ε_{yz} や ε_{zy} と表す。** このように、せん断ひずみの定義には 2 種類あるので、注意が必要である。



せん断ひずみの定義

以上から、yz 面内のせん断変形を表すせん断ひずみ ε_{yz} を (x, y, z) の関数として次式のように定義できる。

$\varepsilon_{yz} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$

同様に、zx 面内のせん断変形を表すせん断ひずみ ε_{zx} や xy 面内のせん断変形を表すせん断ひずみ ε_{xy} についても (x, y, z) の関数として次式のように定義できる。

$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z})$

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x})$

18 ひずみテンソル

伸びひずみの定義 と せん断ひずみの定義 を組み合わせると、物体の任意点 (x, y, z) のひずみを (x, y, z) の関数として

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$　　(但し $i, j = x, y, z$ また $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$)

のように $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zz}$ の 9 個の成分を、i, j の添字を使って 1 つの記号で表すことができる。ちなみに定義から、$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$, $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$ である。この 9 個の成分を行列表示したり、添字を用いた演算のわかりやすさのため、$i, j = x, y, z$ を $i, j = 1, 2, 3$ と置き換えて、$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ と置き換えて、$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zz}$ の 9 個の成分を、$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}$ と表す場合も多いが、その場合、 伸びひずみの定義 と せん断ひずみの定義 を組み合わせた物体の任意点のひずみは、

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$　　(但し $i, j = 1, 2, 3$)

と表される。このように複数の添字を使って (配列として) 表される量のことを「テンソル」と言う。添字 i, j を用いて定義される上記のひずみはテンソルと言えるので、「ひずみテンソル」と呼ばれる。上の「ひずみテンソル」の場合、添字が 2 つあるため、2 階のテンソルと呼ばれる。添字が 1 つで表現できるベクトル (例えば力とか変位ベクトルとか) は 1 階のテンソルである。1 つの数値として表現できる量 (例えば質量とか x 方向変位とか) は 0 階のテンソルであり、「スカラー」と呼ばれる。スカラーは正負の値を取る普通の数値だから、「x 方向変位」など 1 つの軸上で考えると (数直線上で) 正負の方向を持つと見なすこともできるので「 1 次元ベクトル 」として扱うこともある。a_{ij} を成分とするテンソルは i 行 j 列の行列 $\boldsymbol{a}$ として表現することができる。テンソルやベクトルを 1 文字の記号で表すときは $\boldsymbol{a}$ のように太字で (後藤の手書きの場合は文字の 1 部を二重線にして) 表すが、添字を付けて成分に着目して表記するときは太字にせずに a_{ij} のように書く (例えば、i, j に具体的な数値を代入した a_{23} とかはスカラーなので)。という訳で、ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ を行列で表示すると、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

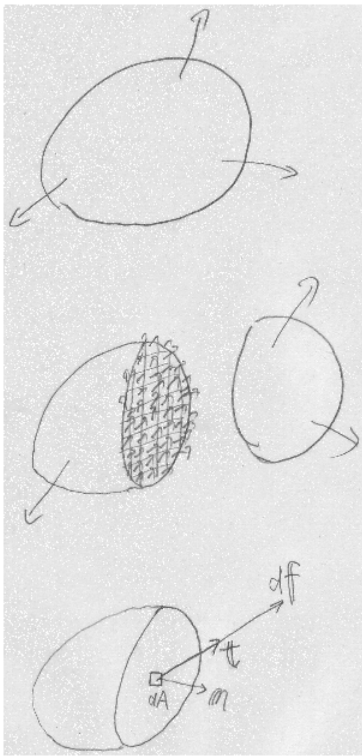
と表せる。$a_{ij} = a_{ji}$ となる行列は (行列表示したときに対角項 a_{ii} を対称軸として対称な位置にある成分どうしが等しくなることから) 対称行列と呼ばれる。前述したように定義から、$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$ なので、ひずみテンソルは対称行列で表される。この場合、ひずみテンソルは対称テンソルと呼ばれる。

ひずみ度

さて、ひずみの次元は、伸びひずみであれせん断ひずみであれ、定義からわかるように無次元である。このテキストで「ひずみ」と言うときは、ひずみテンソル成分である伸びひずみやせん断ひずみなどの無次元量のことであり、それは一般的な物理の分野の使われ方だと思う。ところで、土木ではほとんど使われないとは思うが、建築などの分野では、上記の「ひずみ」の意味で「ひずみ度」という語を用い、ひずみを生じた変形量 (例えば棒の伸びた長さとか) の意味で「ひずみ」という語を用いるという紛らわしい使い分けをする習慣も一部にあるようなので (こうした表現に出会ったときに混乱しないための予備知識として) 参考までに記しておく。土木の分野でも見受けられる「応力度」という紛らわしい表現については 応力-ひずみ関係 参照。

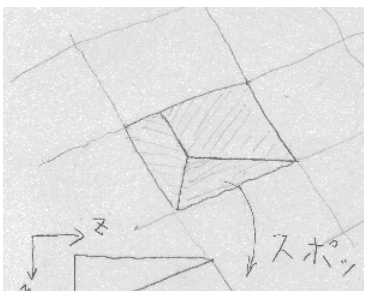
第 IV 部
応力–ひずみ関係

19 応力テンソル



物体にいくつかの外力が作用して変形してつりあっていたとする。この物体の適当なところに切れ目を入れて平らな面で 2 つの部分に切り分けたとする。すると、 内力の節 で述べたように、切断面には、切り離された部分だけで外力とのつりあいが成り立つような内力が作用しなければばならない。 内力の節 では、切断面に作用する内力を断面に直角な 1 つの力、断面に平行な 1 つの力、1 つのモーメントという具合に整理したけども、実際の内力は断面のあらゆる点に分布して作用している。力のつりあいだけが成り立てばいいなら、切断面に分布している内力を図心に作用する x, y, z 方向の力とモーメントとかにまとめてしまってもいいかも知れないが、切り離された物体の変形状態を保つ (例えば平らな切断面が平らな状態を保つ) ようにするには、切断面に分布している内力は、そのまま分布した状態で扱わないといけない。

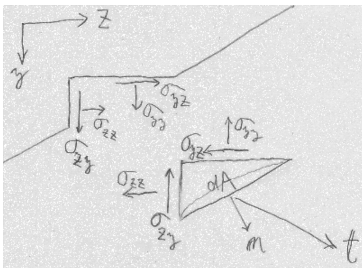
そこで、切断面のある微小部分にだけ着目し、面積 dA の微小部分に作用する内力を、(この微小範囲の内力の分布に関してはまとめてしまってもいいことにして) 1 つの力 $d\boldsymbol{f}$ にまとめて表す。この $d\boldsymbol{f}$ を微小部分の面積 dA で割って圧力の次元で表した $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{f}}{dA}$ を表面力ベクトルという。$\boldsymbol{t}$ は、微小部分の内力を 1 つにまとめたものだから、力の



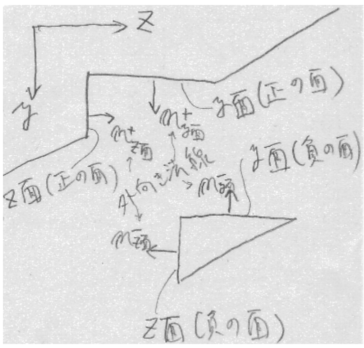
方向は座標方向とは一致しない。そこで、座標方向との関係づけがやりやすいように、微小部分から直角に突き出す単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ で表すことにする。

さて、微小部分に座標軸と平行な切り込みを入れて、図のように三角柱の積木状にスポッと切り出してみる。以後、簡単のため、この積木を yz 平面だけで考える。

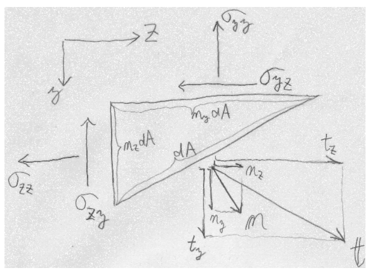
切り出された直角な切断面 (y 軸に直角な y 面と z 軸に直角な z 面) には、表面力ベクトル $\boldsymbol{t}$ とつりあうような内力が作用しなければならない。そこで、それぞれの面に作用する内力を単位面積当たりの力つまり圧力の次元で y 方向成分と z 方向成分として与えることにする。y 面に作用する y 方向の単位面積当たりの力は σ_{yy}, y 面に作用する z 方向の単位面積当たりの力は σ_{yz}, z 面に作用する z 方向の単位面積当たりの力は σ_{zz}, z 面に作用する y 方向の単位面積当たりの力は σ_{zy} という記号で書くことにする。



力の正負の方向は、切断面から直角に突き出す (外向き) 法線の向きが座標の正の向きと一致する場合が正、逆向きの場合は負とする。例えば切り出された三角形の直角をはさむ二面は、外向き法線の向きが座標軸と逆になっている面 (負の面) なので、応力の正の向きは座標軸と逆向きになる。



さて、切り出された直角三角形の微小部分について力のつりあいを考えてみる。まず、表面力ベクトル $\boldsymbol{t}$ を y 方向成分 t_y と z 方向成分 t_z に分解し、単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ も同様に n_y と n_z に分解する。直角三角形の積木の奥行き方向の厚さを簡単のため 1 とすると、斜辺の長さは $\frac{dA}{1} = dA$ となる。残る 2 辺の長さは、単位法線ベクトルが作る直角三角形との相似関係から $n_z : n_y$ の比になることがわかる。単位法線ベクトルの長さは 1 なので $n_z^2 + n_y^2 = 1$ だから、3 平方の定理から直角三角形の 2 辺の長さは、$n_z dA$, $n_y dA$ となる。単位面積当たりの力 (圧力の次元) を力の次元にするには、それぞれの力が作用している面の面積 (奥行きが 1 だから辺の長さ) をかければよく、したがって力のつりあいは以下のように書ける。



y 方向の力のつりあい (下向き正): $(+t_y dA) + (-\sigma_{yy} n_y dA) + (-\sigma_{zy} n_z dA) = 0$
z 方向の力のつりあい (右向き正): $(+t_z dA) + (-\sigma_{yz} n_y dA) + (-\sigma_{zz} n_z dA) = 0$

つまり、dA で割って移項すると、

$$t_y = n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy}$$
$$t_z = n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz}$$

と書けることになる。この式を添字 $i, j = y, z$ を使って表現すると、

$$t_j = \sum_{i=y,z} n_i \sigma_{ij} \quad (\text{但し } j = y, z)$$

と書ける。このように 2 つの添字を使った配列 σ_{ij} として表現できるテンソル $\boldsymbol{\sigma}$ を**応力テンソル**と呼ひ、σ_{zz}, σ_{yz} などの個々の成分を応力テンソル成分または応力成分と呼ぶ。3 次元の場合には、

$$t_x = n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx}$$
$$t_y = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy}$$
$$t_z = n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz}$$

まとめると

$$t_j = \sum_{i=x,y,z} n_i \sigma_{ij} \quad (\text{但し } j = x, y, z)$$

となる。

アインシュタイン規約

　添字を用いた総和演算や行列表示がわかりやすくなるように、$i, j = x, y, z$ を $i, j = 1, 2, 3$ に置き換えて (σ_{yz} などを σ_{23} などと) 表記するなら、

$$t_j = \sum_{i=1}^{3} n_i \sigma_{ij} \quad (\text{但し } j = 1, 2, 3)$$

となる。ちなみに、添字の多いテンソルの式を表記する際に、総和記号 $\sum$ は省略して、同じ添字が 2 つ以上あった場合 (この場合の i とか) には、その添字について和を取るという表記法 (アインシュタイン規約とか総和規約と呼ばれる) で表記されることも多いので、一応、覚えておいてほしい。アインシュタイン規約に慣れると、配列計算のプログラムも書きやすくなるかも知れない。 ちなみに、上の式をアインシュタイン規約で書くと、

$$t_j = n_i \sigma_{ij} \quad (\text{但し } i, j = 1, 2, 3)$$

となる。 ひずみテンソル の場合と同様に、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ を行列で表示するなら、

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

と表せる。応力テンソル成分 σ_{ij} もひずみテンソル成分 ε_{ij} と同様に対称行列になっているということについては、下の 応力のつりあい のところで示す。

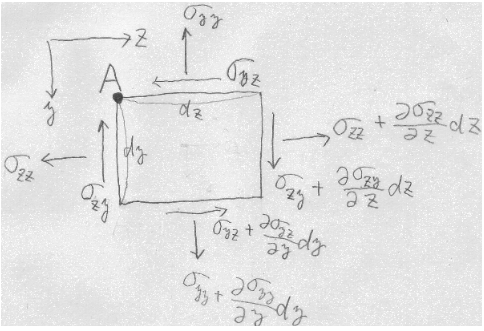
直応力、せん断応力

応力成分 σ_{ij} のうち、切断面に直角な成分 ($i=j$ となる $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz}$) を**直応力**と呼び、切断面に平行な成分 ($i\neq j$ となる $\sigma_{xy},\sigma_{yz},\sigma_{zx},\sigma_{yx},\sigma_{zy},\sigma_{xz}$) を**せん断応力**と呼ぶ。直応力やせん断応力を特に区別しない場合は単に**応力**と呼ぶ。応力の次元は定義から分かるように圧力 (力/面積) の次元で、単位は $\mathrm{N/m^2}$ や Pa などで表される。SI 単位の接頭語 (k, M, G など) は、原則として先頭に 1 個だけつけて、分母にはつけないことが望ましいとされているので、$\mathrm{kN/m^2}$, kPa, MPa, GPa などを使うのが推奨されるであろう。もっとも、土木などの分野では、$\mathrm{kN/mm^2}$ や工学単位系の $\mathrm{kgf/mm^2}$ などの表記もまだ習慣的に使われることがある。例えば、平成 14 年度版の道路橋示方書では、$\mathrm{N/mm^2}$ が使われている。

合応力、応力度

梁の問題では、切断面に作用する内力を軸力や曲げモーメントなどの 断面力 で与えるが、こうした断面力は (後で詳しく述べるが) 軸方向の直応力を断面に対して積分して合計することで求めることができる (曲げモーメントは、圧縮側と引張側の方向を考慮して腕の長さをかけながら積分すればいいが、「せん断力」はちょっと特殊なのでこれについては 後述)。このように断面力は断面に作用する応力を合計したものという意味合いで「**合応力**」と呼ばれることもある。合応力は応力ではなく断面力だから、次元は「力」だったり「力×長さ」だったりする。さて、土木や建築の分野では、上記の「応力」の意味で「**応力度**」という語を用い、上記の「合応力」の意味で「応力」という語を用いるという使い分けをする紛らわしい習慣が一部にある (例えば、平成 14 年度版の道路橋示方書でも「応力度」という表現が使われ続けている)。 「応力」を圧力の次元を持つ応力テンソル成分の意味で使うのが物理の分野の一般的な使い方だと思うので、このテキストでも「応力」は圧力の次元を持つ応力テンソル成分の意味で用いることとし、「応力度」といった紛らわしい表現は使わない。「ひずみ度」については ひずみ-変位関係 参照。

20　応力のつりあい



物体内部の任意の微小部分を切り取って考える場合、その微小部分の切断面に作用する応力はつりあっていないといけない。各辺が座標軸と平行になるような直方体 (2 次元で考えるなら長方形) の微小要素を切り出してみる。まず、図の点 A をはさむ 2 辺の切断面については、 応力テンソルの節 の三角形の積木の切断面と同様に作用する応力を定義する。つまり、y 面に作用する y 方向の応力は σ_{yy}, y 面に作用する z 方向の応力は σ_{yz}, z 面に作用する z 方向の応力は σ_{zz}, z 面に作用する y 方向の応力は σ_{zy} とし、応力の正負の方向は、切断面から直角に突き出す (外向き) 法線の向きが座標の正の向きと一致する場合が正、逆向きの場合は負とする。例えば点 A をはさむ 2 面は、外向き法線の向きが座標軸と逆になっている面 (負の面) なので、応力の正の向きは座標軸と逆向きになる。点 A をはさむ 2 面のむかい側の 2 面に作用する応力は、長方形の縦横の長さ dy, dz がそれぞれ 0 とみなせるぐらいに微小なら、向かい合う面の応力とつりあうような逆向きの応力ということにしてもいいかも知れないが、ここでは、ある点の応力とそこから dy や dz 離れた地点の応力とは同じとはみなせないことにしておく。そこで、 ひずみテンソル ε_{ij} と同様に応力テンソル σ_{ij} も任意点 (x,y,z) の関数として与えられると考えることにする。といっても、応力テンソルは、確か物体を半分に切った切断面から切り出した微小な三角柱の積木の表面に対して定義したのであって、点に

対して定義した訳ではないはずではなかったかと言われるかも知れないが、まあ、そこは微小な三角柱は十分に微小で例えばその重心とかの点に対して各応力成分が定義されているのだと考えてほしい。で、今 考えている微小な長方形要素の点 A をはさむ 2 面に作用する応力成分は、例えばこの長方形の図心の「点」に対して定義されたものだということにしておいて、点 A の向かい側の 2 面に作用する応力は、この長方形要素に隣り合う長方形要素の図心点について定義されたものだというふうにでも考えてほしい。すると、例えばこの長方形要素の左端の面では σ_{zz} の値を取る直応力が、そこから dz 離れた右端の面では σ_{zz} からどれだけ変化するかの変化量は、σ_{zz} を z の関数とみなして z 方向の瞬間の変化率 $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$ に dz をかけて、$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}dz$ と表すことができそうだ (微分が偏微分になっているのは σ_{zz} が x, y, z の関数だから)。つまり、右端の面の直応力は、$\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}dz$ と表すことができそうだ。他の応力成分についても同じように考えていけば、点 A の向かい側の 2 面について図のような応力が作用していると考えられる。さて、これらの作用応力に対して力のつりあいを考えてみる。この長方形要素というか奥行きを考えると直方体要素の奥行きの長さが 1 だとすると、各面に作用している応力に作用面の (長方形として見た場合は) 辺の長さ (と 1) をかければ、作用している力が求まる。よって、

y 方向のつりあい (下向き正): $(-\sigma_{zy}dy) + (-\sigma_{yy}dz) + \{+(\sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}dz)dy\} + \{+(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}dy)dz\} = 0$
z 方向のつりあい (右向き正): $(-\sigma_{zz}dy) + (-\sigma_{yz}dz) + \{+(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}dz)dy\} + \{+(\sigma_{yz} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}dy)dz\} = 0$

となるが、$+-$ で相殺される項を消して $dydz$ で割ると、応力のつりあいは、

y 方向のつりあい: $\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$
z 方向のつりあい: $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0$

と書ける。これを添字 $i, j = 1, 2, 3$ を使って 3 次元について整理すると、

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{但し } j = 1, 2, 3)$$

と書ける。但し、$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ である。

さて、次にモーメントのつりあいを考える。

点 A 回りのモーメントのつりあい (左まわり正):
$-(\sigma_{zz}dy) \cdot \frac{dy}{2}$ 　左端直応力による
$+(\sigma_{yy}dz) \cdot \frac{dz}{2}$ 　上端直応力による
$+\{(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}dz)dy\} \cdot \frac{dy}{2}$ 　右端直応力による
$-\{(\sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}dz)dy\} \cdot dz$ 　右端せん断応力による
$-\{(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}dy)dz\} \cdot \frac{dz}{2}$ 　下端直応力による
$+\{(\sigma_{yz} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}dy)dz\} \cdot dy$ 　下端せん断応力による
$= 0$

$+-$ で相殺される項を消して $dzdy$ で割ると、

$\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\frac{dy}{2}$
$-(\sigma_{zy}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}dz)$
$-\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dz}{2}$
$+(\sigma_{yz}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}dy)$
$=0$
微小項を削除すると、

$\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$
となる。つまり、3 次元でのモーメントのつりあいは、

$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 　(但し $i,j=x,y,z$)

と書ける。 ひずみテンソル 成分 ε_{ij} の場合は、 伸びひずみ と せん断ひずみ の定義から対称行列になっていたが、応力テンソル成分 σ_{ij} は、モーメントのつりあいから対称行列となる。

21 応力-ひずみ関係

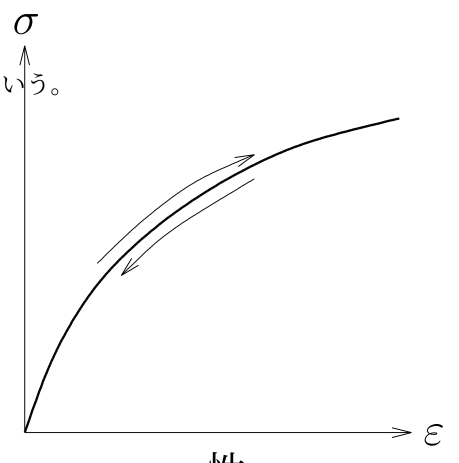
さて、物体の任意点の変形を ひずみテンソル として定義できたし、物体の任意点の内力を 応力テンソル として定義できた訳だけど、この応力とひずみとを関係づけるにはどうしたらいいだろうか。我々が (中学や高校の理科や物理の範囲で) 知っている物体の弾性に関する法則を応力テンソルやひずみテンソルを用いてもっと一般的に表現したらどういうふうに表現できるだろうか。『物理 I』(東京書籍、平成 18 年 2 月 10 日発行)p.157 によると、「ばねに力を加え変形させたあと，力を除くと変形がもとに完全にもどる場合，この変形を弾性変形という。」とあり、注釈部分には「これに対して，力をとりのぞいても変形が残るような場合を塑性変形という。」なんてことまでちゃんと書いてある。塑性変形が生じない範囲の外力を受ける場合、ばねに限らず、一般的な物体 (木材とかプラスチックとか金属とか) では、ある外力の組み合わせに対しては同じ変形状態になる。外力を取り除けば、外力が作用していなかった初期状態に戻るし、また同じ外力を加えれば、同じ変形状態になる。つまり、外力の状態と変形の状態とが 1 対 1 に対応している。こういう (木材とかプラスチックとか金属とかの) 物体の一般的な性質のことを弾性と呼んでいるのだが、外力の状態と物体の任意点の変形とをいきなり対応づけるのは難しい。その点、外力を受けた際に物体内部に生じる 内力 であれば、任意点 (x,y,z) での応力テンソルの 9 成分で表せるから、任意点 (x,y,z) でのひずみテンソル 9 成分と成分の数も同じだし、それらが 1 対 1 で対応しているという関係を式で表現できそうだ。つまり、「ある点の応力テンソル 9 成分が分かれば、その点のひずみテンソル 9 成分が決まる」あるいは「ある点のひずみテンソル 9 成分が分かればその点の応力テンソル 9 成分が決まる」のどちらかを式で表現したいのだが、ここでは、後者の表現を用いるとすると、それはたぶん「応力テンソル成分 σ_{ij} が座標 (x,y,z) とひずみテンソル成分 ε_{ij} の関数として与えられる」ということなのだが、座標 (x,y,z) とひずみテンソル成分 ε_{ij} の関数として与えられる 4 階のテンソル E_{ijkl} を用いると、その関係は、

$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{但し } i,j,k,l = 1,2,3)$

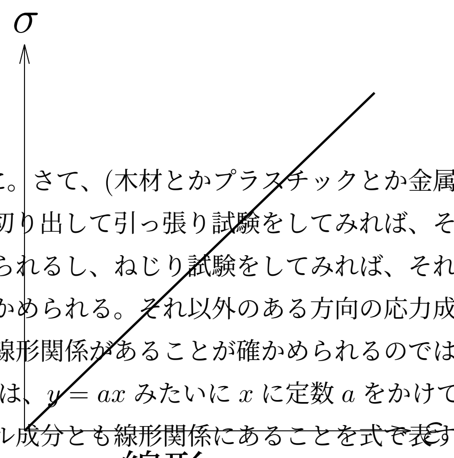
と表せる。a_{ij} みたいな 2 階のテンソルなら i 行 $\times j$ 列の行列として表せるけど、4 階のテンソルになると、紙の上で表現するのは難しくなるが、$i \times j \times k \times l = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ の 81 成分のテンソルとういことになる。ちなみに アインシュタイン規約 で書くと、

$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{但し } i,j,k,l = 1,2,3)$

となる。この 4 階のテンソル E_{ijkl} のことを**弾性係数テンソル**という。



性



線形

さて、一応、上式で関連づけた応力テンソルとひずみテンソルのそれぞれ適当な 1 つの成分どうしの関係をグラフに書くなら、図のような感じになる。応力とひずみが 1 対 1 に対応していて、応力を加えて取り除くと、同じ経路上を戻ってくる。さて、我々が知っている (木材とかプラスチックとか金属とかの) 一般的な物質は、単に弾性があるだけではなく、外力と変形との関係が比例関係にあることも分かっている。

比例関係というのは、グラフに書くと直線になるので線形というが、ちなみに、弾性だからといって線形だとは限らないし (力を取り除くと元に戻るけど、力と変形の関係は線形じゃない非線形弾性もあるし)、線形だからといって弾性だとは限らない (力と変形の関係は線形だけど力を取り除いても元に戻らない線形非弾性もあり得る) ので混同しないように。さて、(木材とかプラスチックとか金属とかの) 一般的な物質の塊から x, y, z 軸方向にそれぞれ細長い棒を切り出して引っ張り試験をしてみれば、それぞれの方向の直応力と伸びひずみが線形関係にあることが確かめられるし、ねじり試験をしてみれば、それぞれの方向のせん断応力とせん断ひずみが線形関係にあることも確かめられる。それ以外のある方向の応力成分とある方向のひずみ成分との組み合わせでも適当な試験を行えば線形関係があることが確かめられるのではないかと思う (たぶん)。x と y が線形関係にあることを式で表すには、$y = ax$ みたいに x に定数 a をかけて y と等値すればいいが、どの応力テンソル成分もどのひずみテンソル成分とも線形関係にあることを式で表すには、上の弾性係数テンソル E_{ijkl} の 81 個の成分がすべて定数であればよい。という訳で、ここでは木材とかプラスチックとか金属のような物質を扱うことにして、E_{ijkl} の各成分は定数だということにすると、

$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{但し } i,j,k,l = 1,2,3)$

の式は**一般化されたフックの法則**と呼ばれる。さて、 応力テンソル成分 σ_{ij} と ひずみテンソル成分 ε_{kl} は、それぞれ対称で、$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ だから、E_{ijkl} の添字 ij を ji と取り換えたものは同じだし、kl を lk と取り換えたものも同じである。すると i, j の組み合わせは 6 通りだし、すると k, l の組み合わせも 6 通りだから、E_{ijkl} の独立な成分は $6 \times 6 = 36$ 個でいいことになる。さて、ここから先はまだまだ遠いので、この辺

から適当にごまかし始めるが、ひずみエネルギー密度関数 $W=\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$ というものが存在してある条件を満たすと E_{ijkl} の独立な成分は 21 個に減り、互いに直交する 3 面に対して対称性を有す (木材のような) 直交異方性材料だと E_{ijkl} の独立な成分は 9 個となり、更に、プラスチックや金属のようにあらゆる方向に対称面を持つ等方性材料では独立な成分は 2 個だけになる。例えば、応力テンソル成分の重複する対称成分を取り除いた 6 成分 $(\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{zz},\sigma_{yz},\sigma_{zx},\sigma_{xy})$ とひずみテンソル成分の重複する対称成分を取り除いた 6 成分 $(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz},\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx},\varepsilon_{xy})$ との関係を G と ν という 2 個の定数を使って 6×6 の行列を用いて関係づけると、以下のように書ける。

応力-ひずみ関係

$$
\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\\ \sigma_{xy}\end{pmatrix}
=\frac{2G}{1-2\nu}
\begin{bmatrix}
1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\
\nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\
\nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\\ \varepsilon_{xy}\end{pmatrix}
$$

このように関係づけられる G のことをせん断弾性係数と言い、ν のことをポアソン比と言う (もっとわかりやすい物理的な意味との対応は後述)。ちなみに、等方性材料では $E=2G(1+\nu)$ とおいた E をヤング率と言う (ヤング率のもっとわかりやすい物理的意味との対応は後述)。さて、上の式の行列の逆行列を求めれば、ひずみについての表現で以下のように書くこともできる。

ひずみ-応力関係

$$
\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx}\\ \varepsilon_{xy}\end{pmatrix}
=\frac{1}{E}
\begin{bmatrix}
1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\
-\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\
-\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx}\\ \sigma_{xy}\end{pmatrix}
$$

ちなみに、せん断応力成分 $\sigma_{yz},\sigma_{zx},\sigma_{xy}$ は、$\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}$ の記号で書かれることも多い。もし、せん断ひずみ成分 $\varepsilon_{yz},\varepsilon_{zx},\varepsilon_{xy}$ が、$\gamma_{yz},\gamma_{zx},\gamma_{xy}$ という記号で書かれていたら、 工学せん断ひずみ 成分で書かれている可能性が高い。その場合、せん断応力とせん断ひずみとを関係づける係数は 2 倍または $\frac{1}{2}$ にする必要があるので注意が必要である。例えば、上のせん断応力とせん断ひずみの関係式だけを抜き出すと

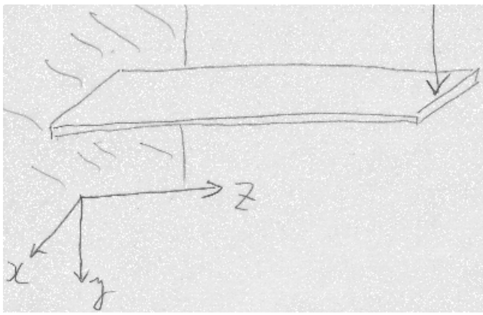
$$\tau_{yz}=2G\varepsilon_{yz}$$
$$\tau_{zx}=2G\varepsilon_{zx}$$
$$\tau_{xy}=2G\varepsilon_{xy}$$

となるが、これを工学せん断ひずみ成分で書くと

$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$
$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$
$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

となる。

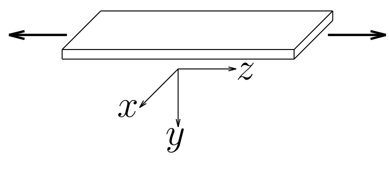
22　平面応力問題



薄い板を対象とするような問題の場合、板厚方向の応力成分が、それ以外の方向の応力成分に比べて無視できるような近似ができる状態を**平面応力状態**と呼ぶ。例えば、板厚方向に y 軸を取ると、$\sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$ とみなせる状態のことである。但し対応するひずみ成分もすべて 0 とみなせるという訳ではない。上の ひずみ–応力関係 の式に $\sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$ を代入すると、

$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz})$
$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \neq 0$
$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx})$
$\varepsilon_{yz} = 0$
$\varepsilon_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{2G}$
$\varepsilon_{xy} = 0$

となる。$\sigma_{yy} = 0$ と見なせるからといって、ε_{yy} は 0 とは見なせないので注意が必要である。



例えば、薄い板を細長く切り出して、細長い方向に引っ張るような問題を考える場合、板厚方向を y, 細長い方向を z とすると、σ_{zz} 以外の応力成分は無視できるような状態になるので、上の式に $\sigma_{xx} = 0$ を代入すると、

$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E}$
$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu\sigma_{zz}}{E}$
$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$

となるから、これらを整理して、

1 次元のフックの法則

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$$

ポアソン比

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}}$$

という関係が得られる。$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$ は 1 次元のフックの法則だし、$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}}$ は、横ひずみと縦ひずみの比がポアソン比になることを示している。マイナスがついているのは、引っ張られる方向の縦ひずみは正の値を取り、圧縮される方向の横ひずみは負の値を取るからで、ポアソン比の値としては正である。ちなみに秋田大学 3 年次の土木環境工学実験の 構造実験 では、この $\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$ を使ってヤング率を測定し、$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}}$ を使ってポアソン比を求める。

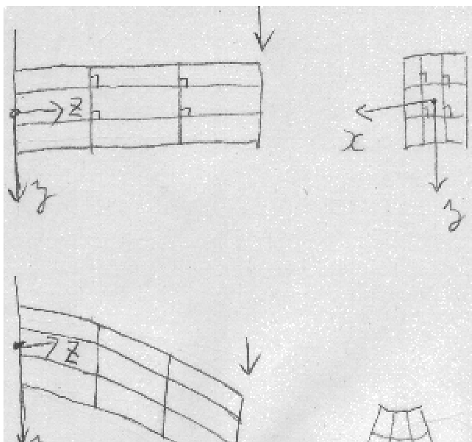
第 V 部
梁モデル

23　梁モデル

土木の構造物は、橋とか (x, y, z の 3 つの軸のうち)1 つの軸方向に細長い棒状のものが多い。細長い棒が細長い軸の方向 (このテキストでは z 方向) に圧縮や引張の力を受ける場合は、(圧縮を受けた際の座屈などを考えなくていいなら) 1 次元のバネの伸び縮みでモデル化できるかも知れないが、橋みたいな構造物は、細長い棒が水平に横たわっていて、車の重さとか自重とかが鉛直方向に作用するから、細長い棒が曲げられるような変形をする。このような変形を表現するには、1 次元のバネのフックの法則では対処できない。現時点で我々が使える道具としての知識は、

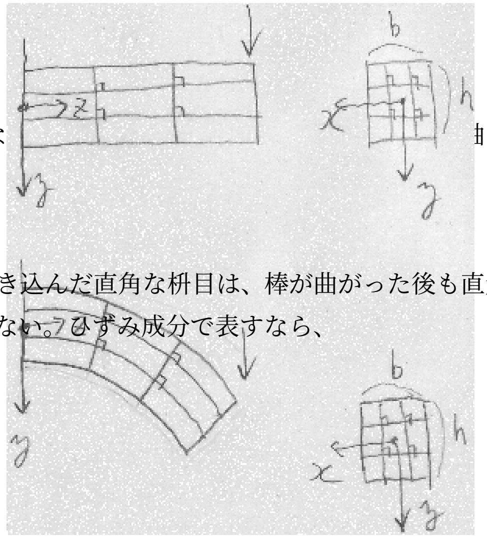
- 力のつりあい (ニュートンの第 1, 第 2 法則)
- ひずみ-変位関係 (定義)
- 応力-ひずみ関係 (3 次元のフックの法則)

である。例えば細長い棒が任意の外力を受けて変形したとき、その任意点の変位を求めることを 1 つの目的としてみよう。外力と内力 (断面力) の関係は、 力のつりあい で関係づけられそうだ。断面の応力を断面で積分して合計すれば、断面力と応力を関係づけられそうだ。任意点の応力とひずみは、 応力-ひずみ関係 で関係づけられる。任意点のひずみと変位は ひずみ-変位関係 で関係づけられる。ということは、現時点で我々が持っている道具を使って、細長い棒が任意の外力を受けて変形したときの外力と任意点の変位の関係を、ある条件下で求められそうだ。



割と太短い棒の場合、図のように棒の側面に直角な枡目を描いておいて曲げてやると、曲げを受ける平面内でせん断変形が生じて枡目の角は直角ではなくなるだろう。また

棒の断面についても、例えば引っ張られる上辺は軸方向に伸びたぶん幅方向には縮んだり、圧縮される下辺は軸方向に縮んだぶん幅方向には膨れたりといった変形も生じるかも知れない。これらの変形を考慮すると式の導出がなかなか繁雑になってしまうので (もちろん、それらを考慮すべき場合は、考慮して繁雑な式を導出すべきだろうが)、ここではまず簡単な問題として、上記の変形が無視できるような「**非常に細長い棒が、ちょっとだけ曲がる**」場合に限定して考えたい。という訳で次の 2 つの仮定を設けることにする。な[illegible]軸に沿って z 軸を取り、下にたわむ方向に y 軸を取る。



- **ベルヌーイ・オイラーの仮定**：図のように棒の側面に描き込んだ直角な枡目は、棒が曲がった後も直角を保つ。つまり曲げを受ける平面内のせん断変形は生じない。ひずみ成分で表すなら、

  $\varepsilon_{yz} = 0 \quad$ (yz 面内のせん断変形がない)

  $\varepsilon_{zx} = 0 \quad$ (zx 面内のせん断変形がない)

- **断面形不変の仮定**: 棒の断面は、伸び縮み変形もせん断変形もしない。つまり、棒が曲がった後も断面は変形しない。ひずみ成分で表すなら、

  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0 \quad$ (x, y 方向の伸び縮み変形がない)

  $\varepsilon_{xy} = 0 \quad$ (xy 面内のせん断変形がない)

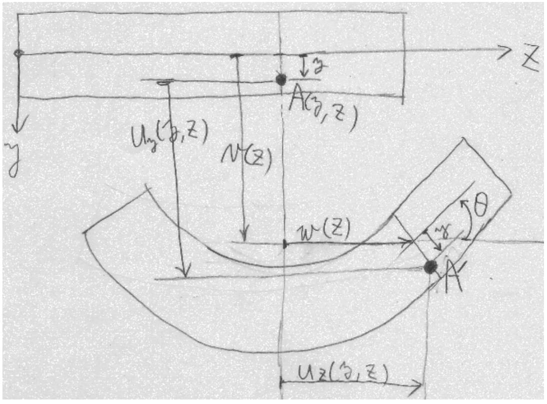
これらの仮定を満たす棒のことをベルヌーイ・オイラー梁 (Bernoulli-Euler 梁) とか**初等梁**と言う。このテキストで特に注意書きなしで「梁」と書く場合は初等梁のことを指す。ちなみに、ティモシェンコ梁 (Timoshenko 梁) は、曲げを受ける平面内のせん断変形を考慮した梁である。

24 (任意点の) ひずみ-(図心) 変位関係

3 次元の問題は難しいので、まずは 初等梁 が 2 次元 (yz) 平面内で外力を受け、その平面内で変形する問題を考えたい。 初等梁 の図心を連ねた軸に沿って z 軸を取り、梁が下にたわむ方向に y 軸を取る。 初等梁は、せん断ひずみ成分や断面の伸びひずみ成分がなく、ゼロでない唯一のひずみ成分は z 軸方向の伸びひずみ $varepsilon_{zz}$ である。我々は、 任意点のひずみと変位の関係 を知っているが、梁の問題では主に図心の変位が分かることが重要なので (というか任意点の変位は図心の変位と幾何学的に関係づけられるので)、問題を簡単にするため、任意点 (x, y, z) の軸方向伸びひずみ $\varepsilon_{zz}(x, y, z)$ を、以下に定義する図心 $(0, 0, z)$ の変位と関係づけることを試みる。

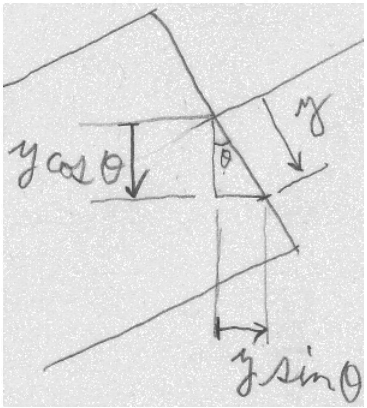
$v(z) = u_y(0, 0, z) \quad$ (図心の y 方向変位: **たわみ**)

$w(z) = u_z(0,0,z)$ (図心の z 方向変位: 軸方向変位)



図のように初期状態で梁のある断面にある任意点 A が、梁が外力を受けて変形した後、A' に移動したとするとき、 点 A の変位ベクトル成分 は、図の幾何学的な関係から次式で表される。

$u_y(y,z) = v(z) + y\cos\theta(z) - y$
$u_z(y,z) = w(z) + y\sin\theta(z)$



上式の $\theta(z)$ は、初期状態では水平だった (座標 z での) 図心軸 (初等梁では断面の法線と一致) が、変形後に x 軸の右ねじまわり (図を見ている人にとっては左回りに) 何ラジアン回転したかを示している。ここでは、ベルヌーイ・オイラーの仮定 が成り立つような $\theta(z)$ が 1 に比べて非常に小さい問題を考えているので、$\sin\theta(z) \cong \theta(z)$, $\cos\theta(z) \cong 1$ と見なすと、点 A の変位成分は、

$u_y(y,z) \cong v(z)$
$u_z(y,z) \cong w(z) + y\theta(z)$

と書ける。さて せん断ひずみの定義 は、

$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$

で与えられるが、この式に ベルヌーイ・オイラーの仮定 $\varepsilon_{yz} = 0$ と 点 A の変位成分 $u_y(y,z), u_z(y,z)$ とを代入してみる。すると、

$0 = \frac{1}{2}(\frac{dv(z)}{dz} + \theta(z)) = 0$

つまり、

たわみ角

$\theta(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$

となる。なお、微分記号を偏微分から常微分に書き換えたのは、$v(z)$ は、z だけの関数として扱っているからである。つまり、図心軸の回転量は、(初等梁の場合) たわみの微分 (にマイナスをつけたもの) と等しくなるが、このたわみの 1 回微分 $+\frac{dv(z)}{dz}$ を**たわみ角**と呼ぶ。

梁軸方向に z(右正)、たわみ方向に y(下正) を取る このテキストの座標 では θ は、x 軸右ねじまわりの回転角で、$\frac{dv(z)}{dz}$ とは符号が逆になる。座標の取り方によっては、$\frac{dv(z)}{dz}$ の正の向きがそのまま座標軸の右ねじ回転と一致するように定義されている文献もある。いずれにせよ ($\frac{dv(z)}{dz}$ が座標軸の右ねじ回転に一致するかしないかにかかわらず) $\frac{dv(z)}{dz}$ のことをたわみ角と言う文献もあれば、$-\frac{dv(z)}{dz}$ のことをたわみ角と言う文献もあるので注意が必要である。

この $\theta(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$ の式を 点 A の変位成分 $u_y(y,z), u_z(y,z)$ に代入すると、以下のように図心変位 (たわみ $v(z)$ と軸方向変位 $w(z)$) の関数として書ける。

$$u_y(y,z) = v(z)$$

$$u_z(y,z) = w(z) - y\frac{dv(z)}{dz}$$

さて、 初等梁 でゼロでない唯一のひずみは ε_{zz} であるが、任意点 (y,z) における ε_{zz} は、 伸びひずみの定義 から、

$$\varepsilon_{zz}(y,z) = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

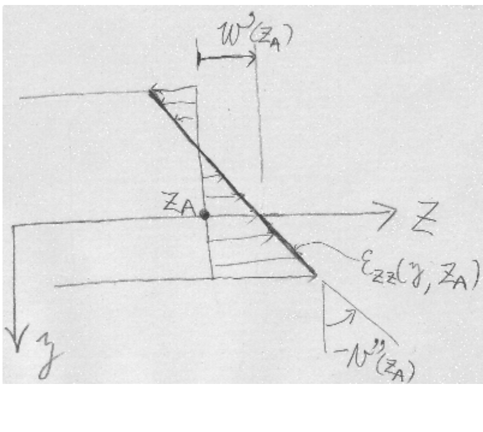
であるから、この式に $u_z(y,z)$ を代入してみる。すると、

ひずみ-図心変位関係

$$\varepsilon_{zz}(y,z) = \frac{dw(z)}{dz} - y\frac{d^2v(z)}{dz^2}$$

となる。なお、微分記号を偏微分から常微分に書き換えたのは、$w(z)$ や $v(z)$ は、z だけの関数として扱っているからである。今、見やすくするために微分記号を $'$ で省略して

$$\varepsilon_{zz}(y,z) = w'(z) - yv''(z)$$



と書いて、ある断面に着目して例えば $z = z_A$ を代入してみると、

$$\varepsilon_{zz}(y) = w'(z_A) - yv''(z_A)$$

となる。

ひずみの三角形分布

$w'(z_A)$ や $v''(z_A)$ は定数であるから、ε_{zz} は y と線形関係にあり、$-v''(z_A)$ がその傾き、$w'(z_A)$ が z 軸の切片を表している。つまり、 初等梁 では、軸方向ひずみ ε_{zz} だけが存在し、任意の断面の軸方向ひずみは、梁の桁高 (けただか)y 方向に対して線形分布していることが分かる。これを**ひずみの三角形分布**と呼ぶ。

第 VI 部
断面力

25 応力分布

ひずみ-変位関係 と ベルヌーイ・オイラーの仮定 から、yz 平面内で外力を受けて変形する ベルヌーイ・オイラー梁 のゼロでないひずみは、軸方向の伸びひずみだけで、

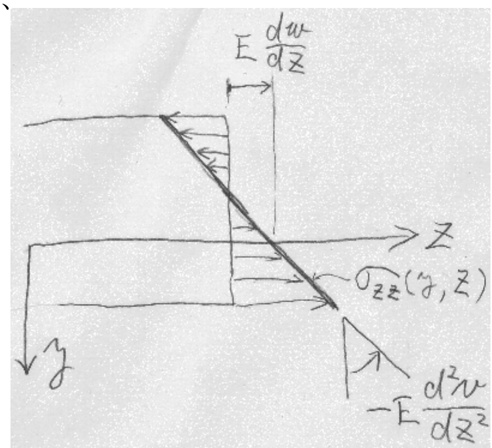
$$\varepsilon_{zz}(y,z) = \frac{dw(z)}{dz} - y\frac{d^2v(z)}{dz^2}$$

となることが導かれた。 1 次元のフックの法則 は、

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$$

だから、これを上の ε_{zz} の式に代入すると、

$$\sigma_{zz}(y,z) = E(\frac{dw(z)}{dz} - y\frac{d^2v(z)}{dz^2})$$



応力の三角形分布

という**直応力と図心変位の関係**が導かれる。

軸方向の伸びひずみ ε_{zz} が桁高 (けただか)y 方向に 三角形分布 しているのと同様に、それを定数 E 倍した軸方向の直応力 σ_{zz} も三角形分布していることになる。

26　断面力、合応力

まずは基礎 の章では、外力を受けてつりあっている梁を適当な断面で切ったときにその切断面に外力とつりあうように作用させる内力として、梁の切断面の重心に作用する次の 3 つの力

軸力: 切断面に垂直な (軸方向の)1 つの力

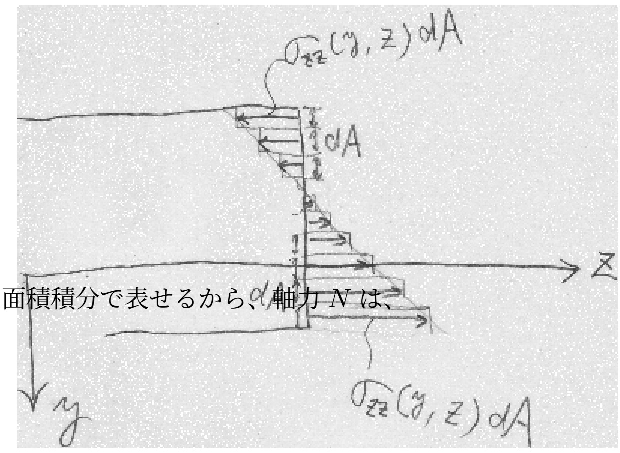
せん断力: 切断面に平行な 1 つの力

曲げモーメント: 切断面に作用する 1 つのモーメント

を**断面力**と、おおざっぱに定義したけど、ほんとは初等梁の切断面には、軸方向の直応力 σ_{zz} が 三角形分布しているから、この直応力を断面に対して (積分して) 合計したものが、より正確な断面力の定義になりそうだ。このように、断面力を「断面に作用する応力を断面に対して積分して合計したもの」という意味合いで、**合応力**と呼ぶこともある。合応力は応力ではなく断面力だから、次元は「力」だったり「力×長さ」だったりする。さて、土木や建築の分野では、「応力」の意味で「**応力度**」という語を用い、上記の「合応力」の意味で「応力」という語を用いるという紛らわしい使い分けをする困った習慣が一部にある (例えば、平成 14 年度版の道路橋示方書でも「応力度」という表現が使われ続けている)。「応力」を圧力の次元を持つ応力テンソル成分の意味で使うのが物理の分野の一般的な使い方だと思うので、このテキストでも「応力」は圧力の次元を持つ応力テンソル成分の意味で用いることとし、「応力度」といった紛らわしい表現は使わない。「ひずみ度」については ひずみ-変位関係 参照。

27　軸力

という訳で、まずは軸力を直応力 σ_{zz} から求めてみたい。断面を面積 dA の微小部分に分割して、(この微小部分の範囲内では σ_{zz} が一様だとみなすなら) それぞれの微小部分に $\sigma_{zz}(y,z)dA$ の軸方向の力が作用していると考えられる。この軸方向の力 $\sigma_{zz}(y,z)dA$ をすべての微小部分に対して合計すれば、断面の軸力が求まりそうだ。微小部分を極限まで小さくしてやれば、これは面積積分で表せるから、軸力 N は、



$$N(z) = \int_A \sigma_{zz}(y,z)dA$$

と定義できる。これに、 直応力-図心変位の関係 を代入すると、

$N(z) = \int_A E(\frac{dw(z)}{dz} - y\frac{d^2v(z)}{dz^2})dA$

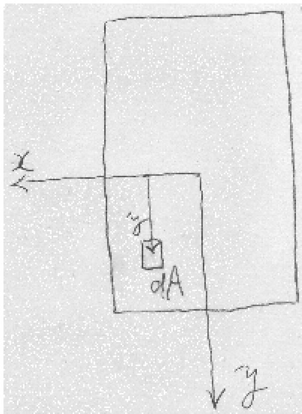
$= E\int_A dA\frac{dw(z)}{dz} - E\int_A ydA\frac{d^2v(z)}{dz^2}$

となる。ここで $\int_A dA$ は断面の微小部分の面積 dA を全断面に対して合計したものだから全断面の断面積そのものになるので、

断面積 $A = \int_A dA$

とおく。

一方、$\int_A ydA$ は、図のように、断面の微小部分の面積 dA と微小部分の y 座標 (正負の区別があるので注意) をかけたものを全断面に対して積分して合計したものであり、**断面 1 次モーメント**と呼ばれる定数 (断面定数) である。そこで、



断面 1 次モーメント $J_x = \int_A ydA$

とおいて、軸力の式を書き直すと、

$N(z) = EA\frac{dw(z)}{dz} - EJ_x\frac{d^2v(z)}{dz^2}$

となる。J_x の添字 $_x$ は、x 軸まわりの断面 1 次モーメントの意味でつけている。同様に y 軸まわりの断面 1 次モーメント J_y は

$J_y = \int_A xdA$

と定義できる。実は図心の座標 (x_G, y_G) は、y, x 軸まわりの断面 1 次モーメント J_y, J_x を使って、

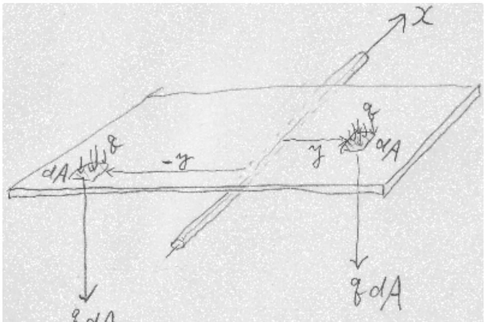
$x_G = \frac{J_y}{A}$

$y_G = \frac{J_x}{A}$

と定義できる。

27.1 断面 1 次モーメントのイメージ

断面 1 次モーメントと図心のイメージは、こんなふうに考えたらいいかも知れない。x 軸まわりの断面 1 次モーメント J_x の場合、図のように、x 軸が細い棒で、その上に梁断面の形をした板がのっていて、板の単位面積あたりの重量が q の場合、この板の x 軸まわりのモーメントの合計を求めてみたい。



x 軸よりも右側 $(y > 0)$ の微小部分 dA は、x 軸右ねじまわりに $yqdA$ のモーメントをつくるし、x 軸よりも左側 $(y < 0)$ の微小部分 dA は、x 軸左ねじまわりに $-yqdA$ のモーメントをつくるけど、これを x 軸右ねじまわりになおすと結局 $yqdA$ だから、この板の x 軸まわりのモーメントの合計は、$\int_A yqdA$ となり、結局 qJ_x となる。つまり、x 軸まわりの断面 1 次モーメント J_x は、その断面の形の板を x 軸 (という水平の細い棒) にのせたときに、x 軸の右ねじまわりに (単位面積あたり 1 の) 自重でどれだけ回転しようとするかというモーメントの合計を表していると言えるだろう。**つまり、x 軸がちょうど図心上にあれば、x 軸まわりのモーメントがつりあうので、断面 1 次モーメント J_x は 0 になる。つまり水平な細長い棒の上に板を水平にして板の図心をのせれば板は回転せずにつりあうことができる。同様に、y 軸がちょうど図心上にあれば、y 軸まわりのモーメントがつりあうので、断面 1 次モーメント J_y は 0 になる。つまり、鉛直に立てた針の先に板を水平にして板の図心をのせれば板は針の上でつりあっていることができる。** そのような針の先にのせたときにつりあう点のことを我々は「重心」と呼んでいるが、単位面積あたりの重量が一様なら、重心は図心と一致する。さて、 ここで用いている初等梁のモデル では、z 軸は図心を通っていることになっているので、実は、断面 1 次モーメント J_x は 0 である。よって、z 軸上の任意点の軸力 $N(z)$ は、結局

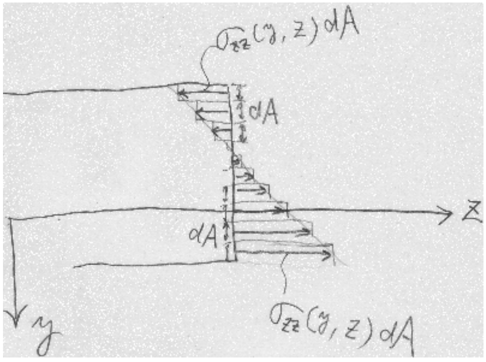
軸力-図心変位関係

$N(z) = EA\frac{dw(z)}{dz}$

と表されることになる。この EA は、**伸び剛性**と呼ばれ、梁の伸び縮みしにくさを表している。つまり応力

が三角形分布している断面の直応力を、断面形を考慮しながら積分して合計してやると、ちょうど断面の図心での直応力 $E\frac{dw(z)}{dz}$ に断面積 A をかけたものと等しくなる。一方、図心から離れた位置の直応力に断面積をかけたものは、直応力の合計とは、ずれる。そのずれの大きさは、三角形分布の傾きに断面 1 次モーメントとヤング率をかけたもの $(EJ_x\frac{d^2v(z)}{dz^2})$ となる。

28　曲げモーメント



断面の直応力 σ_{zz} から軸力を求めたのと同じ要領で、次に断面の曲げモーメントを直応力 σ_{zz} から求めてみたい。断面を面積 dA の微小部分に分割して、(この微小部分の範囲内では σ_{zz} が一様だとみなすなら) それぞれの微小部分に $\sigma_{zz}(y,z)dA$ の軸方向の力が作用していると考えられる。この軸方向の力 $\sigma_{zz}(y,z)dA$ に断面上の $y=0$ の点まわりモーメントの腕の長さ y をかけてすべての微小部分に対して合計すれば、断面の曲げモーメントが求まりそうだ。では。微小部分を極限まで小さくしてやれば、これは面積積分で表せるから、曲げモーメント M は、

$$M(z)=\int_A y\sigma_{zz}(y,z)dA$$

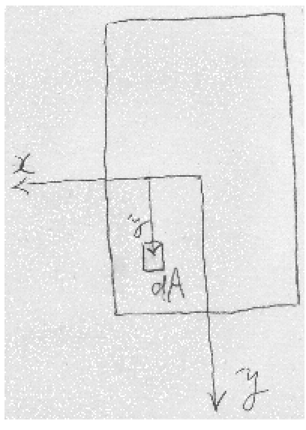
と定義できる (断面 1 次モーメント のところで説明したように、$y>0$, $y<0$ の部分で同じ向きの力がつくるモーメントの向きは逆まわりになるが、これは y の符号で表現されるのでそのまま y をかけて全領域に積分すればよい)。

これに、 直応力-図心変位の関係 を代入すると、

$$M(z)=\int_A yE(\tfrac{dw(z)}{dz}-y\tfrac{d^2v(z)}{dz^2})dA$$

$$=E\int_A ydA\tfrac{dw(z)}{dz}-E\int_A y^2dA\tfrac{d^2v(z)}{dz^2}$$

となる。ここで $\int_A ydA$ は 軸力 の節で説明したように断面 1 次モーメント J_x と置き換えるとして、今度は、$\int_A y^2dA$ という積分が出てきた。



$\int_A y^2dA$ は、断面の微小部分の面積 dA と微小部分の y 座標の 2 乗 (つまり y の正負は関係なくなる) をかけたものを全断面に対して積分して合計したものであり、**断面 2 次モーメント**と呼ばれる定数 (断面定数) である。そこで、

断面 2 次モーメント $I = \int_A y^2 dA$

とおいて、曲げモーメントの式を書き直すと、

$M(z) = EJ_x \frac{dw(z)}{dz} - EI \frac{d^2 v(z)}{dz^2}$

となる。 断面 1 次モーメントのイメージ の節で説明したように、x 軸が図心上にあれば断面 1 次モーメント J_x は 0 になるので、z 軸が図心を通っているこの初等梁のモデルでは、$J_x = 0$ となる。よって、曲げモーメントは、結局

曲げモーメント-たわみ関係

$M(z) = -EI \frac{d^2 v(z)}{dz^2}$ **(重要)**

と表されることになる。この EI は**曲げ剛性**と呼ばれ、梁の曲がりにくさを表している。なお、断面 2 次モーメント I が x 軸まわりの断面 2 次モーメントであることを強調する場合には、I_x と表記する。さて、曲げモーメント $M(z)$ がたわみ $v(z)$ の 2 階微分で表されているということは、曲げモーメント分布が力のつりあいで求まる静定構造物なら、これを z について 2 回積分すればたわみ $v(z)$ を z の関数として求めることができそうである。この方法については 静定梁のたわみ の章で述べる。

さて、 応力-図心変位関係 $\sigma_{zz}(y,z) = E(\frac{dw(z)}{dz} - y\frac{d^2 v(z)}{dz^2})$ に、 軸力-図心変位関係 $N(z) = EA\frac{dw(z)}{dz}$ と曲げモーメント-たわみ関係 $M(z) = -EI\frac{d^2 v(z)}{dz^2}$ を代入すると、

直応力-曲げモーメント関係

$\sigma_{zz}(y,z) = \frac{N(z)}{A} + \frac{M(z)}{I} y$

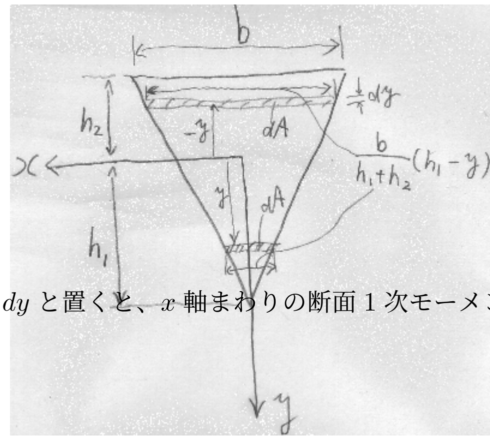
という関係式が得られる。特に軸力 N が作用していない場合には、

$\sigma_{zz}(y,z) = \frac{M(z)}{I} y$ **(重要)**

となる。これは、梁の断面力と断面形状が分かれば、断面の直応力の三角形分布が求まる式なので重要であり、公式として暗記しておく必要がある。

軸力 N が作用していない場合、曲げによる直応力の三角形分布は、図心 (つまり $y=0$) でちょうど σ_{zz} が 0 になる。このように σ_{zz} が (ということは ε_{zz} も)0 になっていて、伸び縮みが発生していない面 (この場合、zx 平面) のことを中立面と呼び、中立面が断面と交わる線を**中立軸**と呼ぶ。「伸び縮みが発生していない軸」として定義される中立軸は、軸力が作用していない直線梁の場合は、図心を通る。

29　断面定数の計算



図のような二等辺三角形の対称軸に y 軸を取り、x 軸を三角形の図心とは一致しない適当な位置に取った場合に、この三角形の x 軸回りの断面 1 次モーメントを求めてみたい。任意の y 座標で x 軸に平行な細長い面積 dA の微小部分を考える。この微小部分の横幅は、三角形の相似関係から $\frac{b}{h_1+h_2}(h_1-y)$ となる (y は x 軸より下か上かで正負の値を取るので、この式は微小部分が x 軸より下にあっても上にあっても成り立つ)。微小部分の面積を $dA=\frac{b}{h_1+h_2}(h_1-y)dy$ と置くと、x 軸まわりの断面 1 次モーメントは、

$$J_x=\int_A ydA$$

$$=\int_{-h_2}^{h_1} y\frac{b}{h_1+h_2}(h_1-y)dy$$

$$=\int_{-h_2}^{h_1} \frac{b}{h_1+h_2}(h_1y-y^2)dy$$

$$=\frac{b}{h_1+h_2}[\frac{h_1y^2}{2}-\frac{y^3}{3}]_{-h_2}^{h_1}$$

$$=\frac{b}{h_1+h_2}\left(\frac{h_1^3}{2}-\frac{h_1^3}{3}-\frac{h_1h_2^2}{2}-\frac{h_2^3}{3}\right)$$

$$=\frac{b}{6(h_1+h_2)}(h_1^3-3h_1h_2^2-2h_2^3)$$

$$=\frac{b}{6(h_1+h_2)}(h_1^3-h_1h_2^2-2h_1h_2^2-2h_2^3)$$

$$=\frac{b}{6(h_1+h_2)}(h_1(h_1^2-h_2^2)-2h_2^2(h_1+h_2))$$

$$=\frac{b}{6}(h_1(h_1-h_2)-2h_2^2)$$

$= \frac{b}{6}(h_1^2 - h_1 h_2 - h_2^2 - h_2^2)$

$= \frac{b}{6}((h_1 + h_2)(h_1 - h_2) - h_2(h_1 + h_2))$

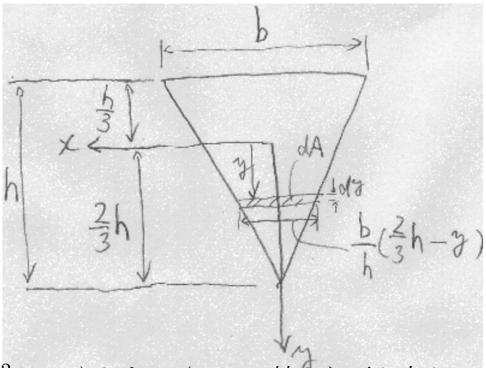
$= \frac{b}{6}(h_1 + h_2)(h_1 - 2h_2)$

となる。さて、図心の y 座標 y_G を求めてみると、

$y_G = \frac{J_x}{A}$

$= \frac{\frac{b}{6}(h_1+h_2)(h_1-2h_2)}{\frac{b(h_1+h_2)}{2}}$

$= \frac{h_1-2h_2}{3}$



となる。さて、原点がちょうど図心に来るようにするには、$y_G = 0$ とおけばいいから、$\frac{h_1-2h_2}{3} = 0$ から $h_1 = 2h_2$ となり、三角形の図心は頂点から高さの $\frac{2}{3}$ の位置にあることがわかる。

次に、x 軸がこの三角形の図心上にある場合に、この三角形の x 軸まわりの断面 2 次モーメントを求めてみよう。任意の y 座標で x 軸に平行な細長い面積 dA の微小部分を考える。この微小部分の横幅は、三角形の相似関係から $\frac{b}{h}(\frac{2}{3}h - y)$ となる (y は x 軸より下か上かで正負の値を取るので、この式は微小部分が x 軸より下にあっても上にあっても成り立つ)。微小部分の面積を $dA = \frac{b}{h}(\frac{2}{3}h - y)dy$ と置くと、x 軸まわりの断面 2 次モーメントは、

$I = \int_A y^2 dA$

$= \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} y^2 \frac{b}{h}(\frac{2}{3}h - y)dy$

$= \frac{b}{h}\int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} (\frac{2}{3}hy^2 - y^3)dy$

$= \frac{b}{h}[\frac{2}{3}h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}]_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h}$

$= \frac{b}{h}(\frac{2^4h^4}{3^5} - \frac{2^4h^4}{4 \cdot 3^4} + \frac{2h^4}{3^5} + \frac{h^4}{4 \cdot 3^4})$

$= \frac{bh^3}{3^4}(\frac{16}{3} - 4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4})$

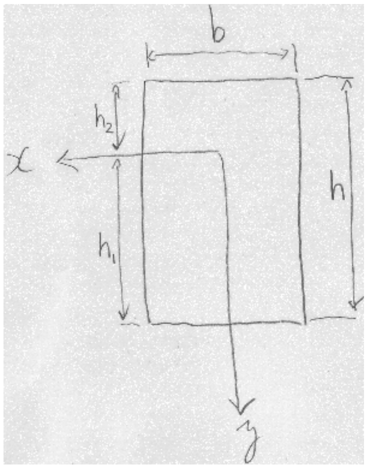
$= \frac{bh^3}{3^4}(2 + \frac{1}{4})$

$= \frac{bh^3}{36}$

となる。

30 練習問題

30.1 問 1



図のような長方形の x 軸まわりの断面 1 次モーメントと図心の位置、断面 2 次モーメントを求めよ。また x 軸が図心上にある場合、**長方形の断面 2 次モーメントが $\frac{bh^3}{12}$ となる** ことを示せ。

30.2 解答

$S_x = \int_A ydA = \int_{-h_2}^{h_1} ybdy$

$= [b\frac{y^2}{2}]_{-h_2}^{h_1} = \frac{b(h_1^2 - h_2^2)}{2}$ $I = \int_A y^2 dA = \int_{-h_2}^{h_1} y^2 bdy$

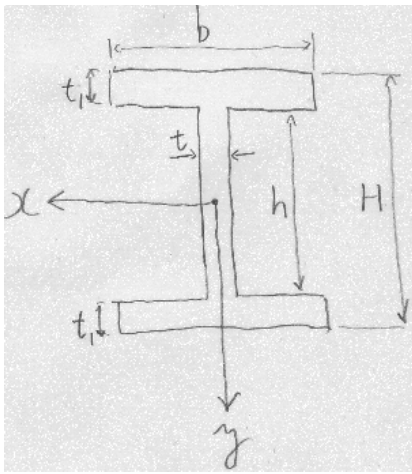
$= [b\frac{y^3}{3}]_{-h_2}^{h_1} = \frac{b(h_1^3 + h_2^3)}{3}$

$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{h_1 - h_2}{2}$

$y_G = 0$ とおくと、$h_1 = h_2$ なので、

$I = \frac{b(2h_1^3)}{3} = \frac{bh^3}{12}$

30.3 問 2



図のような 2 軸対称の I 型断面の図心上に x 軸があるとき、x 軸まわりの断面 2 次モーメントを求めよ。

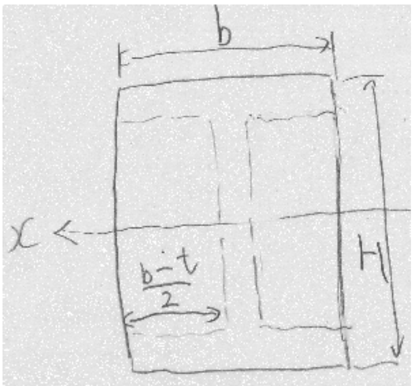
30.4 解答

$I = \int_A y^2 dA$

$= \int_{-\frac{H}{2}}^{-\frac{h}{2}} by^2 dy + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ty^2 dy + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} by^2 dy$

$= [b\frac{y^3}{3}]_{-\frac{H}{2}}^{-\frac{h}{2}} + [t\frac{y^3}{3}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + [b\frac{y^3}{3}]_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}}$

$= \frac{bH^3-(b-t)h^3}{12}$



ついでに、$b \times h$ の長方形に対する公式 $\frac{bh^3}{12}$ を利用するなら、$b \times H$ の大きい長方形の断面 2 次モーメントから $\frac{b-t}{2} \times h$ の小さい長方形 2 個ぶんの断面 2 次モーメントを引くという便法によって求めた答えが、面積積分による答えと一致することを確認せよ。

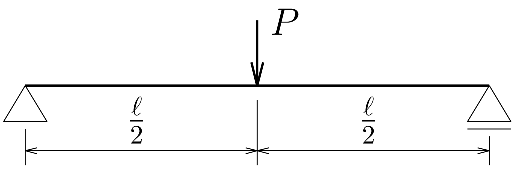
第 VII 部
静定梁のたわみ

31　境界値問題

断面力 の章で、断面の 曲げモーメントとたわみの関係 が

$M(z) = -EI\frac{d^2v(z)}{dz^2}$

と表されることが示された。曲げモーメント $M(z)$ がたわみ $v(z)$ の 2 階微分で表されているということは、曲げモーメント分布が力のつりあいで求まる静定梁なら、これを z について 2 回積分すればたわみ $v(z)$ を z の関数として求めることができそうである。



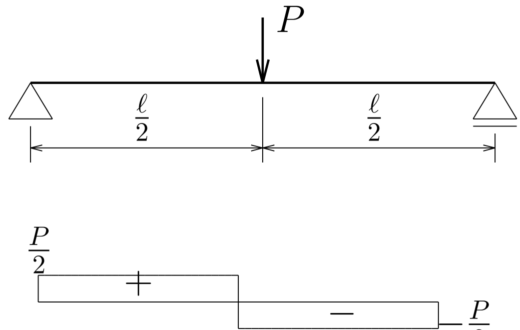
という訳で、図のような中央に集中荷重を受ける単純支持梁について、上の 2 階の微分方程式を使ってたわみを求めてみる。梁の左端を原点として梁軸に沿って右側正に z 軸を取る。この梁の曲げモーメント分布は、まずは基礎 (の復習) の章の 断面力の計算 の節の梁と同じなので (軸力は曲げモーメントのつりあいに関係しないから)、

$M(z) = \frac{P}{2}z \quad (0 \le z \le \frac{\ell}{2})$
$M(z) = \frac{P}{2}(\ell - z) \quad (\frac{\ell}{2} \le z \le \ell)$

となる。便宜上、$0 \le z \le \frac{\ell}{2}$ の左半分のたわみを $v_{左}$ と書いて、$\frac{\ell}{2} \le z \le \ell$ の右半分のたわみを $v_{右}$ と書くことにし、$\frac{d}{dz}$ の微分を $'$ で表して (例えば $M(z) = -EI\frac{d^2v(z)}{dz^2}$ を $M(z) = -EIv''$ みたいに表記して)、それぞれ z について 2 回積分してみると、

$0 \leq z \leq \frac{\ell}{2}$ について
$-EIv''_{左} = \frac{P}{2}z$
$-EIv'_{左} = \frac{P}{4}z^2 + A$
$-EIv_{左} = \frac{P}{12}z^3 + Az + B$
$\frac{\ell}{2} \leq z \leq \ell$ について
$-EIv''_{右} = \frac{P}{2}(\ell - z)$
$-EIv'_{右} = \frac{P}{2}(\ell z - \frac{z^2}{2}) + C$
$-EIv_{右} = \frac{P}{2}(\frac{\ell}{2}z^2 - \frac{z^3}{6}) + Cz + D$

となり、A, B, C, D の 4 つの積分定数が未知数となる。この 4 つの未知数を求めるには、4 つの条件式が必要になるが、両端でたわみが 0 であるという**境界条件**
$v_{左}(0) = 0$
$v_{右}(\ell) = 0$
と、中央の載荷点でのたわみと たわみ角 が一致するという**連続条件**
$v_{左}(\frac{\ell}{2}) = v_{右}(\frac{\ell}{2})$
$v'_{左}(\frac{\ell}{2}) = v'_{右}(\frac{\ell}{2})$
を使えば条件式 4 つなので、4 つの未知数 A, B, C, D を求めることができそうだ。という訳で、これらの条件式を書き出してみると、
$v_{左}(0) = 0$ から $B = 0$
$v_{右}(\ell) = 0$ から $\ell C + D = -\frac{P\ell^3}{6}$
$v_{左}(\frac{\ell}{2}) = v_{右}(\frac{\ell}{2})$ から $\frac{\ell}{2}A - \frac{\ell}{2}C - D = \frac{P\ell^3}{24}$
$v'_{左}(\frac{\ell}{2}) = v'_{右}(\frac{\ell}{2})$ から $A - C = \frac{P\ell^2}{8}$
という A, B, C, D に関する連立方程式になるので、これを解くと、
$A = -\frac{P\ell^2}{16}$
$B = 0$
$C = -\frac{3P\ell^2}{16}$
$D = \frac{P\ell^3}{48}$
と求まる。よって、これらを $v_{左}$ と $v_{右}$ に代入すると梁のたわみは、
$v = \frac{P}{48EI}(3\ell^2 z - 4z^3) \quad (0 \leq z \leq \frac{\ell}{2})$
$v = \frac{P}{48EI}(4z^3 - 12\ell z^2 + 9\ell^2 z - \ell^3) \quad (\frac{\ell}{2} \leq z \leq \ell)$
と求まる。
ちなみに、この問題は左右対称なので、載荷点の梁中央におけるたわみ角がたまたま 0 であるという条件を利用するなら、
$v'_{左}(\frac{\ell}{2}) = 0$ から $A = -\frac{P\ell^2}{16}$ を、
$v'_{右}(\frac{\ell}{2}) = 0$ から $C = -\frac{3P\ell^2}{16}$ を求めることもできる。
また、梁の左端から右端まで一様な (または傾き一定の) 等分布荷重が作用している問題など、$0 \leq z \leq \ell$ の全領域で $v(z)$ を ($v_{左}$ と $v_{右}$ みたいに) 場合分けする必要のない問題では、連続条件は不要なので境界条件だけで答えが求まる。
なお、載荷点の中央部のたわみは、$v_{左}(\frac{\ell}{2}) = v_{右}(\frac{\ell}{2}) = \frac{P\ell^3}{48EI}$ となる。

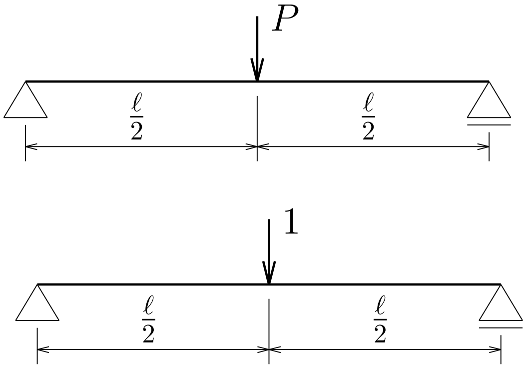


32　単位荷重法

梁のたわみを求める問題は、上の例のように微分方程式を境界値問題として解くのが数学的な意味が明解な解き方だと思うが (だからこのテキストではこれを標準解法とするが)、未知数の多い連立方程式を解く必要があるので、手と鉛筆で解く場合にはそれなりにめんどくさくて計算ミスをしやすい。まあ、それでも任意点のたわみを z の関数として求める必要がある場合には、この標準解法で解いていいと思う。ただ、求めたいたわみが、特定の 1 点のたわみでいい場合、その点のたわみだけを求めるには、**単位荷重法**という便法が使えるので一応、紹介しておく。軸力の作用しない梁の問題なら、曲げモーメント分布 $M(z)$ をまず求める (静定梁なら力のつりあいだけで求まる)。次に、たわみを求めたい点に $P=1$ の単位荷重を作用させた場合の曲げモーメント分布 $\bar{M}(z)$ を求める。すると、求めたい点のたわみは

$v=\int_0^\ell \frac{M(z)\bar{M}(z)}{EI}dz$

と求まる。なぜこの方法で求まるのかということについては、このテキストのネタ本でもある岩熊哲夫・小山茂『鬆徒労苦衷有迷禍荷苦痛– 計算機による構造解析の基礎としての構造力学を独習する』(http://www.civil.tohoku.ac.jp/~bear/node16.html#sec00500a) を参照してほしい。



境界値問題 の例題と同じ中央に集中荷重を受ける単純梁の中央のたわみを単位荷重法で求めてみる。まず、解くべき梁の曲げモーメント分布は、

$M_{左}(z)=\frac{P}{2}z \quad (0\le z\le \frac{\ell}{2})$

$M_{右}(z)=\frac{P}{2}(\ell-z) \quad (\frac{\ell}{2}\le z\le \ell)$

であり、

たわみを求めたい中央部に $P=1$ の単位荷重を載荷した梁の曲げモーメント分布は、

$M_{左}(z)=\frac{1}{2}z \quad (0\le z\le \frac{\ell}{2})$

$M_{右}(z)=\frac{1}{2}(\ell-z) \quad (\frac{\ell}{2}\le z\le \ell)$

である。すると、たわみは、

$v(\frac{\ell}{2})=\int_0^\ell \frac{M(z)\bar{M}(z)}{EI}dz$

$=\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{M_{左}(z)\bar{M}_{左}(z)}{EI}dz+\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{M_{右}(z)\bar{M}_{右}(z)}{EI}dz$

$=\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{P}{2}z\cdot\frac{1}{2}zdz+\frac{1}{EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\frac{P}{2}(\ell-z)\cdot\frac{1}{2}(\ell-z)dz$

$=\frac{P}{4EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} z^2dz+\frac{P}{4EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}(\ell^2-2\ell z+z^2)dz$

$=\frac{P}{4EI}[\frac{z^3}{3}]_0^{\frac{\ell}{2}}+\frac{P}{4EI}[\ell^2 z-lz^2+\frac{z^3}{3}]_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}$

$=\frac{P\ell^3}{48EI}$

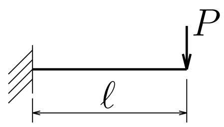
と求まる。

左右対称であるということを利用するなら、$0\le z\le\frac{\ell}{2}$ の左半分の積分だけ求めてそれを 2 倍するという手もある。

33　練習問題

33.1　問 1

図の片持ち梁のたわみを座標 (z) の関数として求めよ。曲げ剛性は EI としてよい。

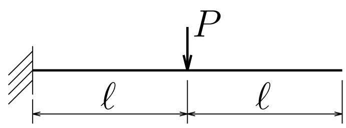


33.2　解答

$M = P(z-\ell)$
$M = -EIv''$ より
$EIv'' = P(\ell - z)$
$EIv' = P(\ell z - \frac{z^2}{2}) + A$
$EIv = P(\frac{\ell}{2}z^2 - \frac{z^3}{6}) + Az + B$
境界条件:$v(0) = 0, v'(0) = 0$ より $B = 0, A = 0$
$v = \frac{P}{6EI}(3\ell z^2 - z^3)$

33.3　問 2

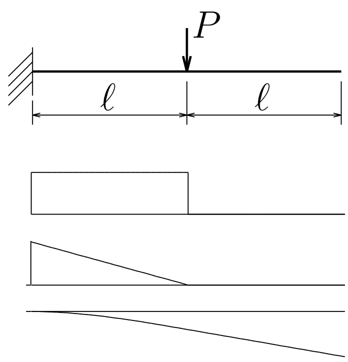
問 1 の結果を利用し、図の片持ち梁のたわみを座標 (z) の関数として求めよ。曲げ剛性は EI としてよい。



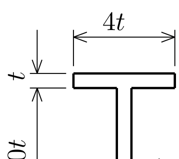
33.4　解答

$0 \le z \le \ell$ の部分は問 1 と同じ。
$\ell \le z \le 2\ell$ のとき
$M = 0$
$M = -EIv''$ より、
$EIv'' = 0$
$EIv' = C$
$EIv = Cz + D$

連続条件: $v'_{左}(\ell) = v'_{右}(\ell)$, $v_{左}(\ell) = v_{右}(\ell)$ より
$C = \frac{P\ell^2}{2}$, $D = -\frac{P\ell^3}{6}$
$v = \frac{P}{6EI}(3\ell^2 z - \ell^3)$
先端のたわみ: $v(2\ell) = \frac{5P\ell^3}{6EI}$



また、この梁が図のような 2 軸対称の I 型断面をしている場合、 直応力と曲げモーメントの関係 を用いて、直応力



の最大値と、それが発生する場所 (y,z) を求めよ。

33.5 解答

$I = \frac{4t(12t)^3}{12} - \frac{3t(10t)^3}{12}$
$= 326t^4$
M-図より $M_{max} = M(0) = -P\ell$
$\sigma_{zz} = \frac{M}{I}y$ より
$\sigma_{zz}(y=-6t, z=0) = \frac{-P\ell}{326t^4}(-6t) = \frac{3P\ell}{163t^3}$
$\sigma_{zz}(y=6t, z=0) = \frac{-P\ell}{326t^4}(6t) = -\frac{3P\ell}{163t^3}$

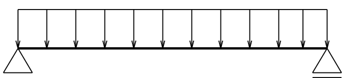
33.6 おまけ

問 2 の先端のたわみを単位荷重法で求めてみる。
$0 \leq z \leq \ell$ では、
$M = P(z-\ell), \bar{M} = z - 2\ell$
$\ell \leq z \leq 2\ell$ では、
$M = 0, \bar{M} = z - 2\ell$
$EIv(2\ell) = \int_0^{2\ell} M\bar{M}dz$
$= \int_0^{\ell} P(z-\ell)(z-2\ell)dz + \int_{\ell}^{2\ell} 0(z-2\ell)dz$
$= P[\frac{z^3}{3} - \frac{3\ell}{2}z^2 + 2\ell^2 z]_0^{\ell}$
$= \frac{5}{6}P\ell^3$
$\therefore v(2\ell) = \frac{5P\ell^3}{6EI}$

第 VIII 部
静定梁のたわみ (練習問題)

34 問 1

図の片持ち梁のたわみを座標 (z) の関数として求めよ。
曲げ剛性は EI としてよい。



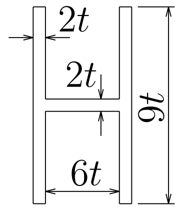
35 解答

$M = \frac{q}{2}(\ell z - z^2)$
$M = -EIv''$ より
$EIv'' = \frac{q}{2}(z^2 - \ell z)$
$EIv' = \frac{q}{2}(\frac{z^3}{3} - \frac{\ell}{2}z^2) + A$

$EIv = \frac{q}{2}(\frac{z^4}{12} - \frac{\ell}{6}z^3) + Az + B$
境界条件:$v(0) = 0, v(\ell) = 0$ より
$B = 0, A = \frac{q\ell^3}{24}$
$v = \frac{q}{24EI}(z^4 - 2\ell z^3 + \ell^3 z)$
中央のたわみ: $v(\frac{\ell}{2}) = \frac{5q\ell^4}{384EI}$

36 問 2

また、この梁が図のような 2 軸対称の H 型断面をしている場合、直応力と曲げモーメントの関係を用いて、直応力の最大値と、それが発生する場所 (y, z) を求めよ。



37 解答

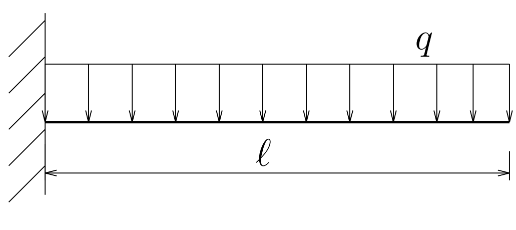
$I = \frac{2t(9t)^3}{12} \times 2 + \frac{6t(2t)^3}{12} = 247t^4$
M-図より $M_{max} = M(\frac{\ell}{2}) = \frac{q\ell^2}{8}$
$\sigma_{zz} = \frac{M}{I}y$ より
$\sigma_{zz}(y = -\frac{9}{2}t, z = \frac{\ell}{2}) = \frac{\frac{q\ell^2}{8}}{247t^4}(-\frac{9}{2}t) = -\frac{9q\ell^2}{3952t^3}$
$\sigma_{zz}(y = \frac{9}{2}t, z = \frac{\ell}{2}) = \frac{9q\ell^2}{3952t^3}$

38 おまけ

中央のたわみを単位荷重法で求めてみる。
$M = \frac{q}{2}(\ell z - z^2)$
左右対称なので、$0 \leq z \leq \frac{\ell}{2}$ の左半分の $\bar{M}_{左} = \frac{z}{2}$ を用いて、左半分の積分を 2 倍する。
$EIv(\frac{\ell}{2}) = \int_0^{\ell} M\bar{M}dz$
$= 2\int_0^{\frac{\ell}{2}} M\bar{M}dz$
$= \frac{q}{2}\int_0^{\frac{\ell}{2}}(\ell z^2 - z^3)dz$
$= \frac{q}{2}[\ell\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}]_0^{\frac{\ell}{2}}$
$= \frac{5q\ell^4}{384}$
$\therefore v(\frac{\ell}{2}) = \frac{5q\ell^4}{384EI}$

39 問 3

図の片持ち梁のたわみを座標 (z) の関数として求めよ。
曲げ剛性は EI としてよい。



40　解答

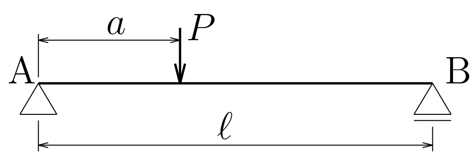
$M = -\frac{q}{2}(z-\ell)^2$
$M = -EIv''$ より
$EIv'' = \frac{q}{2}(z^2 - 2\ell z + \ell^2)$
$EIv' = \frac{q}{2}(\frac{z^3}{3} - \ell z^2 + \ell^2 z) + A$
$EIv = \frac{q}{2}(\frac{z^4}{12} - \frac{\ell}{3}z^3 + \frac{\ell^2}{2}z^2) + Az + B$
境界条件: $v'(0) = 0, v(0) = 0$ より
$A = 0, B = 0$
$v = \frac{q}{24EI}(z^4 - 4\ell z^3 + 6\ell^2 z^2)$
先端のたわみ: $v(\ell) = \frac{q\ell^4}{8EI}$

41　おまけ

先端のたわみを単位荷重法で求めてみる。
$M = -\frac{q}{2}(z-\ell)^2$
$\bar{M} = z - \ell$
$EIv(\ell) = \int_0^\ell M\bar{M}dz$
$= -\int_0^\ell \frac{q}{2}(z-\ell)^3 dz$
$= -\frac{q}{2}[\frac{(z-\ell)^4}{4}]_0^\ell$
$= \frac{q\ell^4}{8}$
$\therefore v(\ell) = \frac{q\ell^4}{8EI}$

42　問 4

図の単純梁のたわみを座標 (z) の関数として求めよ。曲げ剛性は EI としてよい。



43　解答

鉛直方向の力のつりあい: $-V_A + P - V_B = 0$
A 点左回りのモーメントのつりあい: $-aP + \ell V_B = 0$
$V_B = \frac{a}{\ell}P$
$V_A = \frac{\ell - a}{\ell}P$
便宜上、$0 < z < a$ の領域の断面力やたわみに添字 $_{左}$ を、$a < z < \ell$ の領域の断面力やたわみに添字 $_{右}$ をつけて表すことにすると、
$0 < z < a$ について、断面を切ってつりあいを考えると
$S_{左} = \frac{\ell - a}{\ell}P$
$M_{左} = \frac{\ell - a}{\ell}Pz$

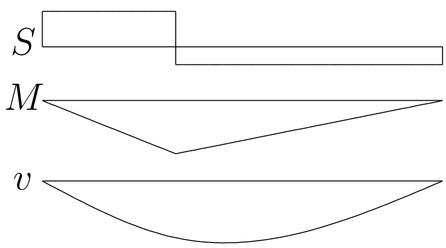
$a < z < \ell$ について、断面を切ってつりあいを考えると
$S_{右} = -\frac{a}{\ell}P$
$M_{右} = \frac{a}{\ell}P(\ell - z)$
$M = -EIv''$ より
$0 < z < a$ について
$EIv''_{左} = \frac{a-\ell}{\ell}Pz$
$EIv'_{左} = \frac{a-\ell}{2\ell}Pz^2 + A$
$EIv_{左} = \frac{a-\ell}{6\ell}Pz^3 + Az + B$
$a < z < \ell$ について
$EIv''_{右} = \frac{a}{\ell}P(z - \ell)$
$EIv'_{右} = \frac{a}{\ell}P(\frac{z^2}{2} - \ell z) + C$
$EIv_{右} = \frac{a}{\ell}P(\frac{z^3}{6} - \frac{\ell}{2}z^2) + Cz + D$

43.1 境界条件

境界条件は両端でたわみが 0, つまり
$v_{左}(0) = 0, v_{右}(\ell) = 0$
これらより
$B = 0$
$D = \frac{a\ell^2 P}{3} - C\ell$
$EIv_{右} = \frac{a}{\ell}P(\frac{z^3}{6} - \frac{\ell}{2}z^2) + Cz + \frac{a\ell^2 P}{3} - C\ell$

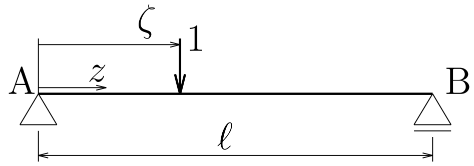
43.2 連続条件

連続条件は、$z = a$ でたわみとたわみ角がそれぞれ連続、つまり
$v_{左}(a) = v_{右}(a)$
$v'_{左}(a) = v'_{右}(a)$
これらより
$C = \frac{Pa}{6\ell}(2\ell^2 + a^2)$
$A = \frac{Pa}{6\ell}(a - \ell)(a - 2\ell)$
よって、たわみは、
$v_{左} = \frac{P(a-\ell)}{6\ell EI}\{z^3 + (a^2 - 2\ell a)z\} \quad (0 < z < a)$
$v_{右} = \frac{Pa}{6\ell EI}\{(z^3 - 3\ell z^2) + (2\ell^2 + a^2)z - a^2\ell\} \quad (a < z < \ell)$



第 IX 部
静定梁の影響線

44　着目点の座標と単位荷重の座標

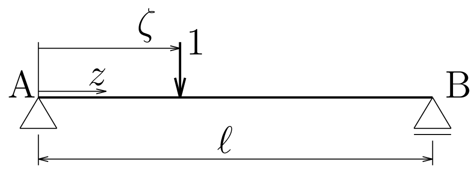


影響線というのは、大きさ 1 の集中荷重 (単位荷重) を梁の左端から右端まで動かしてみたとき、着目点の反力や断面力やたわみなどがどのように変化するかを単位荷重の位置 (ζ) の関数として表したものである。その際、着目点を表す座標 (z) と単位荷重の位置を表す座標 (ζ) とを区別しないと混乱しやすいので、このテキストでは、着目点の座標は z で表し、単位荷重の位置は ζ で表すことにする。

45　手順

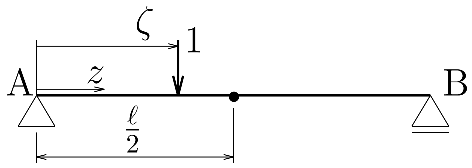
1. 単位荷重の位置 (ζ) を定数とみなして、普通に反力、断面力、たわみなどを z の関数として求める
2. 着目点の座標 ($z = \frac{\ell}{2}$ など) を求めた断面力やたわみの式に代入する
   - その際、単位荷重が着目点より左側にある場合 (つまり着目点が単位荷重より**右側**にある場合) は $\zeta < z < \ell$ の式を使い
   - 単位荷重が着目点より右側にある場合 (つまり着目点が単位荷重より**左側**にある場合) は $0 < z < \zeta$ の式を使う
3. 求めた影響線の関数を横軸を ζ にとってグラフに描く

46　例題

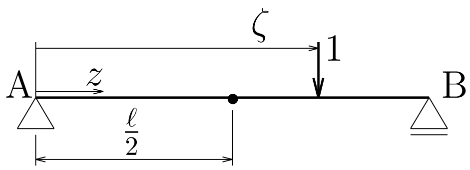


図のような単純梁について、両端の反力の影響線と中央 ($z = \frac{\ell}{2}$) の曲げモーメントとたわみの影響線を求めてみる。
まずは、単位荷重の位置を表す ζ が定数だと考えて、普通に反力や断面力、たわみを z の関数として求める。
この問題は、 静定梁のたわみの練習問題-問 4 で、$a = \zeta$, $P = 1$ と置いたものと同じだから、
$V_B(\zeta) = \frac{\zeta}{\ell}$
$V_A(\zeta) = \frac{\ell - \zeta}{\ell}$
便宜上、$0 < z < \zeta$ の領域の断面力やたわみに添字 $_{左}$ を、$\zeta < z < \ell$ の領域の断面力やたわみに添字 $_{右}$ をつけて表すことにすると、
$0 < z < \zeta$ について、

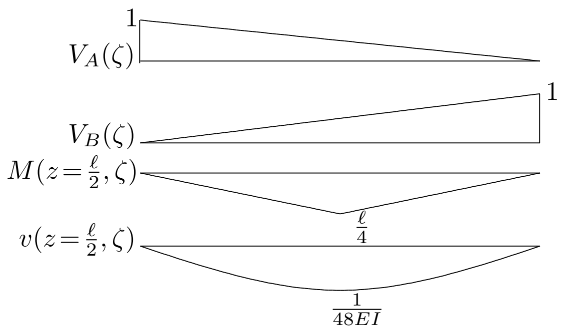
$M_{左}(z,\zeta) = \frac{\ell-\zeta}{\ell}z$
$v_{左}(z,\zeta) = \frac{\zeta-\ell}{6\ell EI}\{z^3 + (\zeta^2 - 2\ell\zeta)z\}$
$\zeta < z < \ell$ について、
$M_{右}(z,\zeta) = \frac{\zeta}{\ell}(\ell - z)$
$v_{右}(z,\zeta) = \frac{\zeta}{6\ell EI}\{(z^3 - 3\ell z^2) + (2\ell^2 + \zeta^2)z - \zeta^2\ell\}$
が普通の梁の断面力やたわみを解く要領で得られる。
まず両端の反力の影響線は $V_A(\zeta)$ と $V_B(\zeta)$ を ζ の関数として横軸に ζ をとってグラフを描けばいい。
中央 $(z = \frac{\ell}{2})$ の曲げモーメントやたわみの影響線を描く場合はちょっと注意が必要である。



$0 < \zeta < \frac{\ell}{2}$ の場合
単位荷重が着目点の $z = \frac{\ell}{2}$ よりも左側にある場合 (つまり着目点が単位荷重よりも**右側**にある場合ということだから)、着目点の曲げモーメントやたわみを表す式は、$\zeta < z < \ell$ の場合の式つまり $M_{右}(z,\zeta)$ や $v_{右}(z,\zeta)$ になる。
よって中央 $(z = \frac{\ell}{2})$ の曲げモーメントの影響線は、
$M_{右}(z = \frac{\ell}{2},\zeta) = \frac{\zeta}{2} \quad (0 < \zeta < \frac{\ell}{2})$
たわみの影響線は、
$v_{右}(z = \frac{\ell}{2},\zeta) = \frac{3\ell^2\zeta - 4\zeta^3}{48EI} \quad (0 < \zeta < \frac{\ell}{2})$



$\frac{\ell}{2} < \zeta < \ell$ の場合
単位荷重が着目点の $z = \frac{\ell}{2}$ よりも右側にある場合 (つまり着目点が単位荷重よりも**左側**にある場合ということだから)、着目点の曲げモーメントやたわみを表す式は、$0 < z < \zeta$ の場合の式つまり $M_{左}(z,\zeta)$ や $v_{左}(z,\zeta)$ になる。
よって中央 $(z = \frac{\ell}{2})$ の曲げモーメントの影響線は、
$M_{左}(z = \frac{\ell}{2},\zeta) = \frac{\ell-\zeta}{2} \quad (\frac{\ell}{2} < \zeta < \ell)$
たわみの影響線は、
$v_{左}(z = \frac{\ell}{2},\zeta) = \frac{4\zeta^3 - 12\ell\zeta^2 + 9\ell^2\zeta - \ell^3}{48EI} \quad (\frac{\ell}{2} < \zeta < \ell)$

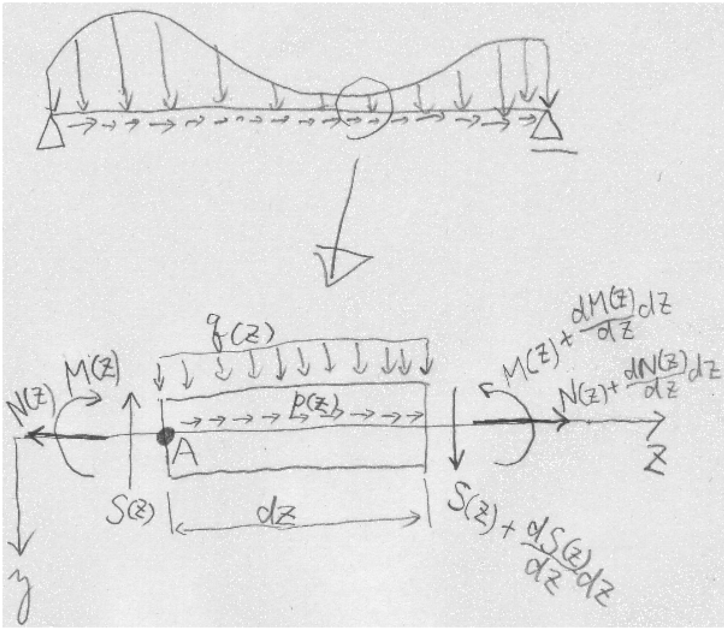


第 X 部
梁の支配微分方程式

47　分布外力と断面力のつりあい

任意の境界条件で任意の外力を受けてつりあっている梁の微小部分を切り取って、この微小部分の力のつりあいを考えてみる。微小部分の長さは dz とし、この微小範囲では鉛直方向の分布荷重外力 $q(z)$ や軸方向の分

布荷重外力 $p(z)$ は等分布していると見なせることにしておく。切り取られたことによってできた両端の切断面には、この切り取られた部分だけでつりあいが成り立つような 内力 としての断面力が図心 (z 軸) に作用していることにする。



この微小部分は外力を受けているので、左端の断面力と右端の断面力は大きさが同じ (で向きが逆) にはならない。左端での軸力を $N(z)$, せん断力を $S(z)$, 曲げモーメントを $M(z)$ とすると、そこから dz だけずれた右端での断面力は (応力のつりあい の節の考え方と同様に)、それぞれ $N(z)+\frac{dN(z)}{dz}dz$, $S(z)+\frac{dS(z)}{dz}dz$, $M(z)+\frac{dM(z)}{dz}dz$ と表せる。これらを用いてこの微小部分の力のつりあいを考えると

y 方向の力のつりあい (下 +):
$-S(z)+q(z)dz+(S(z)+\frac{dS(z)}{dz}dz)=0$
z 方向の力のつりあい (右 +):
$-N(z)+p(z)dz+(N(z)+\frac{dN(z)}{dz}dz)=0$
A 点左まわりのモーメントのつりあい: $-M(z)-q(z)dz\frac{dz}{2}-(S(z)+\frac{dS(z)}{dz}dz)dz+(M(z)+\frac{dM(z)}{dz}dz)=0$

となる。$q(z)dz\frac{dz}{2}$ や $(\frac{dS(z)}{dz}dz)dz$ は d のつく微小量の 2 次項なので微小と見なして無視して整理すると、

せん断力-曲げモーメント関係

$S(z)=\frac{dM(z)}{dz}$ **(重要)**

となり、せん断力が曲げモーメントの微分であるという関係式が得られる。
また、
y 方向のつりあい式を整理すると:
$\frac{dS(z)}{dz}+q(z)=0$
となるが、これに上の せん断力と曲げモーメントの関係 を代入すると、曲げに関するつりあい式は、

曲げに関するつりあい式

$\frac{d^2M(z)}{dz^2}+q(z)=0$

となる。また、z 方向のつりあい式を
整理すると、軸力のつりあい式が

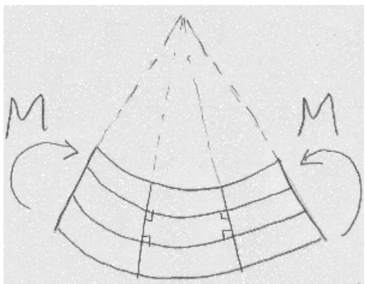
軸力に関するつりあい式

$$\frac{dN(z)}{dz} + p(z) = 0$$

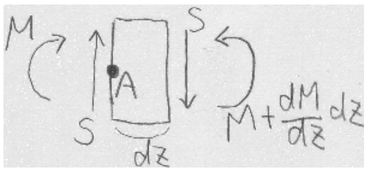
となる。

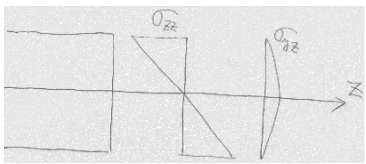
47.1 初等梁のせん断応力とせん断力

梁モデルの仮定 の仮定では、初等梁にはせん断変形がないことになっていた。だから、初等梁でゼロでないひずみは、 軸方向の伸びひずみ ε_{zz} だけ で、ゼロでない応力は 軸方向の直応力 σ_{zz} だけ であった。だから、この軸方向の直応力 σ_{zz} を面積積分して合計することによって 合応力 としての 軸力 N を定義したり、この軸方向の直応力 σ_{zz} に「腕の長さ」をかけながら面積積分して合計することによって 合応力 としての曲げモーメント M を定義することはできたが、断面に作用するせん断応力 σ_{yz} はない (無視できる) ことになっていたので、 合応力 としてのせん断力 S を定義することはできなかった。それなのに梁の微小部分の分布外力と断面力の力のつりあいを考えると、(断面に作用するせん断応力 σ_{yz} は無視されているにもかかわらず) せん断力が、曲げモーメントの微分として $S(z) = \frac{dM(z)}{dz}$ と与えられてしまう。これは 梁モデルの仮定 (でやや強引な仮定をしたことによる) 初等梁理論のちょっと変な点である。そもそも、断面のせん断応力 σ_{yz} が無視できるからといって、断面のせん断力 S もないことにしてしまうと、力のつりあいは曲げモーメントが一定の場合しかなりたたなくなってしまう。



実はベルヌーイ・オイラーの仮定が (それほど細長くない梁にも一般的に) 成り立つ変形は、梁が円弧のように変形する場合で、これは曲げモーメントが一定の状態で「純曲げ」と呼ばれる状態である。しかし、初等梁理論では純曲げ状態でなくてもベルヌーイ・オイラーの仮定が成り立つことにしてしまったために、「断面のせん断応力 σ_{yz} は無視できても、断面力としてのせん断力 S はあることにしないとモーメントのつりあいが満たされない」という矛盾点を抱える理論なので、その点に注意しておく必要がある。





例えば、図のように微小部分の左端と右端とで曲げモーメントが異なる場合、A 点まわりのモーメントのつりあいは、$\frac{dM}{dz}dz - Sdz = 0$ となり、つまり $S(z) = \frac{dM(z)}{dz}$ となる訳だが、$S = 0$ にしてしまうと、モーメントの変化率 $\frac{dM(z)}{dz}$ も 0 になってしまうので、純曲げしか表せなくなってしまう。いくら細長くてせん断変形が無視できる梁だからといって、断面力は純曲げ状態にしかならないというモデルでは、精度が悪すぎて実用的ではないだろう。そこで、(せん断応力 σ_{yz} は無視できたとしても) モーメントのつりあいを満たすために必要なせん断力 S をモーメントの変化率として $S(z) = \frac{dM(z)}{dz}$ と定義してやることで、細長い梁に対する実用的な予測が行えるモデルとなっているのである。

さて、初等梁の式を導く際には、せん断応力 σ_{yz} を無視しているが、実際には、細長い梁でもせん断応力はそれなりにあるのである。初等梁の直応力 σ_{zz} は、三角形分布しているが、この直応力とつりあうようなせん断応力を求めると、せん断応力 σ_{yz} は、図のような放物線分布をしていて、$y = 0$ の位置で最大となる。ちなみに、長方形断面の場合、断面の最大せん断応力は、$\sigma_{yz}^{max} = \frac{3S}{2A}$ となる。こうしたせん断応力に関する詳しい解説は、このテキストのネタ本でもある岩熊哲夫・小山茂『鬆徒労苦衷有迷禍荷苦痛– 計算機による構造解析の基礎としての構造力学を独習する』(http://www.civil.tohoku.ac.jp/~bear/node16.html#sec00500a) を参照してほしい。

48　梁の支配微分方程式

さて、上で導いた 軸力に関するつりあい式
$\frac{dN(z)}{dz} + p(z) = 0$
と 曲げに関するつりあい式
$\frac{d^2M(z)}{dz^2} + q(z) = 0$
に、 軸力-図心変位関係
$N(z) = EA\frac{dw(z)}{dz}$
と 曲げモーメント-たわみ関係
$M(z) = -EI\frac{d^2v(z)}{dz^2}$
をそれぞれ代入すると

梁の支配微分方程式

$EA\frac{d^2w(z)}{dz^2} + p(z) = 0$

$-EI\frac{d^4v(z)}{dz^4} + q(z) = 0$　　**(最重要)**

のような図心変位 v(たわみ) と w(軸方向変位) の微分方程式が導かれる。これを梁の支配 (微分) 方程式とか、特にたわみに関する式を**たわみの微分方程式**とか言う。これらの式を積分して、 静定梁のたわみ の境界値問題の解法と同じ要領で境界条件と連続条件 (と後述するが、集中荷重の場合は載荷点の微小部分の外力と断面力のつりあい条件) を使って積分定数を決定すれば、不静定梁のたわみや軸方向変位を求めることができる。

49　たわみの微分で表した関係式各種

梁の微分方程式 を積分して、たわみや断面力などを求める際、たわみ v の微分 (v', v'', v''' など) がたわみ角や断面力とどのように関係付けられているかということを知っていないと、境界条件や連続条件などを適切に利用することができない。そこで、以下にたわみの微分とたわみ角や断面力との関係式をまとめておく。

- $v(z)$
  たわみ v は、ヒンジ支承や固定端でたわみゼロ ($v = 0$) の境界条件を考慮したり、集中荷重載荷点でたわみが等しい ($v_{左} = v_{右}$) の連続条件を考慮したりする際に用いる。
- $\theta(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$　　**(重要)**
  たわみの 1 階微分 v' は、 たわみ角 である。梁軸方向に z(右正)、たわみ方向に y(下正) を取る このテキストの座標 では θ は、x 軸右ねじまわりの回転角で、v' とは符号が逆になる。座標の取り方によっては、v' の正の向きがそのまま座標軸の右ねじ回転と一致するように定義されている文献もある。いずれにせよ (v' が座標軸の右ねじ回転に一致するかしないかにかかわらず) v' のことをたわみ角と言う文献もあれば、$-v'$ のことをたわみ角と言う文献もある。固定端でたわみ角ゼロ ($v' = 0$) の境界条件を考慮したり、集中荷重載荷点でたわみ角が等しい ($v'_{左} = v'_{右}$) の連続条件を考慮したりする際に用いるが、その場合、符号はあまり問題にならないだろう。

- $M(z) = -EI\frac{d^2v(z)}{dz^2}$ **(重要)**
  たわみの 2 階微分 v'' は、 曲げモーメント と関係づけられる。(モーメント外力の作用しない) ヒンジ端でモーメントゼロ ($v'' = 0$) の境界条件を考慮したり、求めたたわみ関数 v から不静定梁のモーメント分布を求めたり、集中外力載荷部の微小部分のモーメントのつりあい条件を考慮したりする際に用いる。
- $S(z) = -EI\frac{d^3v(z)}{dz^3}$ **(重要)**
  上式の 左辺 と右辺をそれぞれ 1 階微分すれば、たわみの 3 階微分 v''' はせん断力と関係づけられる。求めたたわみ v から不静定梁のせん断力分布を求めたり、集中荷重載荷部の微小部分の集中荷重とせん断力のつりあい条件を考慮したりする際に用いる。
- $-EI\frac{d^4v(z)}{dz^4} + q(z) = 0$ **(最重要)**
  たわみの 4 階微分 v'''' は分布外力と関係づけられる。これを積分して、境界条件や連続条件や集中荷重載荷部の力のつりあい条件を考慮すると不静定梁のたわみや断面力が求まるので、たわみの微分方程式とか 梁の支配微分方程式 と呼ばれる。

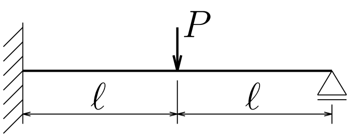
第 XI 部
不静定梁のたわみ

50　境界値問題

梁の支配微分方程式 の章で、 梁の支配微分方程式 が

$$-EI\frac{d^4v(z)}{dz^4} + q(z) = 0$$

とたわみの 4 解微分と分布外力の関係で表されることが示された。ということは、曲げモーメント分布が力のつりあいから求められない不静定梁でもこの式を 4 回積分するとたわみ v の一般解が得られるから、あとは、積分定数を境界条件や連続条件やその他の条件から連立方程式を立てて解いてやれば、不静定梁でもたわみの式が求まりそうである。



という訳で、図のような左端固定、右端ローラー支承で中央に集中荷重を受ける不静定梁について、上の 4 階の微分方程式を使ってたわみを求めてみる。梁の左端を原点として梁軸に沿って右側正に z 軸を取る。便宜上、$0 < z < \ell$ の左半分のたわみを $v_{左}$ と書いて、$\ell < z < 2\ell$ の右半分のたわみを $v_{右}$ と書くことにし、$\frac{d}{dz}$ の微分を $'$ で表すと、分布外力がないので、

$$EIv''''_{左} = 0 \quad (0 < z < \ell)$$
$$EIv''''_{右} = 0 \quad (\ell < z < 2\ell)$$

それぞれ z について 4 回積分してみると、

$0 < z < \ell$ について
$EIv_{左}'''' = 0$
$EIv_{左}''' = A$
$EIv_{左}'' = Az + B$
$EIv_{左}' = \frac{A}{2}z^2 + Bz + C$
$EIv_{左} = \frac{A}{6}z^3 + \frac{B}{2}z^2 + Cz + D$

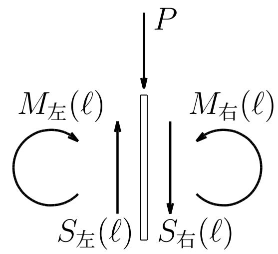
$\ell < z < 2\ell$ について
$EIv_{右}'''' = 0$
$EIv_{右}''' = F$
$EIv_{右}'' = Fz + G$
$EIv_{右}' = \frac{F}{2}z^2 + Gz + H$
$EIv_{右} = \frac{F}{6}z^3 + \frac{G}{2}z^2 + Hz + J$
となる。積分定数が A, B, C, D, F, G, H, J の 8 個あるので、条件式が 8 個必要である。
まず**境界条件**として使えるのは、左の固定端でたわみとたわみ角が 0 つまり
$v_{左}(0) = 0$, $v_{左}'(0) = 0$
と右のローラー支承でたわみとモーメントが 0 つまり
$v_{右}(2\ell) = 0$, $v_{右}''(2\ell) = 0$
の 4 つの条件で、これらの条件から、
$C = 0$
$D = 0$
$G = -2F\ell$
$J = \frac{8}{3}F\ell^3 - 2H\ell$
となる。これらを代入して式を書き直すと、

$0 < z < \ell$ について
$EIv_{左}'''' = 0$
$EIv_{左}''' = A$
$EIv_{左}'' = Az + B$
$EIv_{左}' = \frac{A}{2}z^2 + Bz$
$EIv_{左} = \frac{A}{6}z^3 + \frac{B}{2}z^2$

$\ell < z < 2\ell$ について
$EIv_{右}'''' = 0$
$EIv_{右}''' = F$
$EIv_{右}'' = Fz - 2F\ell$
$EIv_{右}' = \frac{F}{2}z^2 - 2F\ell z + H$
$EIv_{右} = \frac{F}{6}z^3 - F\ell z^2 + Hz + \frac{8}{3}F\ell^3 - 2H\ell$

となる。

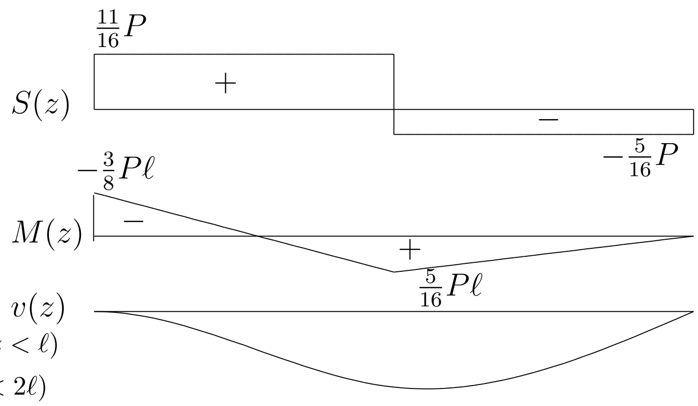
連続条件として使えるのは、中央の集中荷重載荷部で、たわみとたわみ角が等しい、つまり
$v_{左}(\ell) = v_{右}(\ell)$
$v'_{左}(\ell) = v'_{右}(\ell)$
の 2 つの条件で、これらの条件から、
$\frac{A}{2}\ell^2 + B\ell + \frac{3F}{2}\ell^2 = H$ と
$\frac{A}{6}\ell^2 + \frac{B}{2}\ell - \frac{11}{6}F\ell^2 = -H$
の 2 式が求まり、辺々足して整理すると、
$4A\ell + 9B - 2F\ell = 0$
となる。さて、未知数 8 個に対して境界条件 4 つと、連続条件 2 つ使ったが、あと 2 つの条件式が必要である。ここで、中央の集中荷重載荷部の微小部分を図のように薄くスライスして切り取ってみる。



この微小部分の左の切断面にはせん断力 $S_{左}(\ell)$ と曲げモーメント $M_{左}(\ell)$ が作用し、右の切断面にはせん断力 $S_{右}(\ell)$ と曲げモーメント $M_{右}(\ell)$ が作用し、微小部分に集中荷重外力 P が作用している。
この**集中荷重外力が作用する微小部分のつりあい条件**を考えると
鉛直方向の力のつりあい (下 +): $-S_{左}(\ell) + P + S_{右}(\ell) = 0$
となる。また、このスライスの厚さが 0 だとしてモーメントのつりあいを考えると
モーメントのつりあい (左まわり正): $-M_{左}(\ell) + M_{右}(\ell) = 0$
となる。 せん断力は $S = -EIv'''$ と曲げモーメントは $M = -EIv''$ とそれぞれ関係づけられるから、これらのつりあい条件は、
$-(-EIv'''_{左}(\ell)) + P + (-EIv'''_{右}(\ell)) = 0$
$-(-EIv''_{左}(\ell)) + (-EIv''_{右}(\ell)) = 0$
と書け、残りの 2 つの条件式が得られる。これらの式から
$A = F - P$
$A\ell + B = -F\ell$
が得られる。まず、
$4A\ell + 9B - 2F\ell = 0$
$A = F - P$
$A\ell + B = -F\ell$
の A, B, F についての連立方程式を解けば、
$B = \frac{3}{8}P\ell$
$F = \frac{5}{16}P$
$A = -\frac{11}{16}P$
が求まる。すると、
$H = \frac{A}{2}\ell^2 + B\ell + \frac{3F}{2}\ell^2 = \frac{P\ell^2}{2}$ と
$G = -2F\ell = -\frac{5}{8}P\ell$
が求まり、

$J = \frac{8}{3}F\ell^3 - 2H\ell = -\frac{P\ell^3}{6}$
が求まる。

よって、
$v_{左}(z) = \frac{P}{96EI}(-11z^3 + 18\ell z^2) \quad (0 < z < \ell)$
$v_{右}(z) = \frac{P}{96EI}(5z^3 - 30\ell z^2 + 48\ell^2 z - 16\ell^3) \quad (\ell < z < 2\ell)$



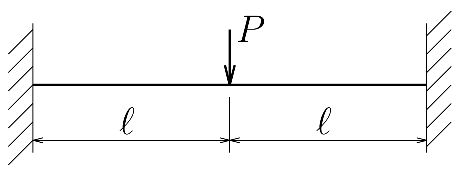
せん断力は、
$S_{左}(z) = -EIv'''_{左}(z) = -A = \frac{11}{16}P \quad (0 < z < \ell)$
$S_{右}(z) = -EIv'''_{右}(z) = -F = -\frac{5}{16}P \quad (\ell < z < 2\ell)$

曲げモーメントは、
$M_{左}(z) = -EIv''_{左}(z) = -Az - B = \frac{P}{16}(11z - 6\ell) \quad (0 < z < \ell)$
$M_{右}(z) = -EIv''_{右}(z) = -Fz - G = \frac{5P}{16}(-z + 2\ell) \quad (\ell < z < 2\ell)$
$M_{左}(\ell) = M_{右}(\ell) = \frac{5}{16}P\ell$

第 XII 部
不静定梁のたわみ (練習問題)

51　問 1

図のような両端固定で中央に集中荷重を受ける不静定梁について、 梁の支配微分方程式 を使ってたわみを求めてみる。梁の左端を原点として梁軸に沿って右側正に z 軸を取る。便宜上、$0 < z < \ell$ の左半分のたわみを $v_{左}$ と書いて、$\ell < z < 2\ell$ の右半分のたわみを $v_{右}$ と書くことにし、$\frac{d}{dz}$ の微分を $'$ で表すと、分布外力がないので、



$EIv'''' = 0 \quad (0 < z < \ell)$
$EIv'''' = 0 \quad (\ell < z < 2\ell)$

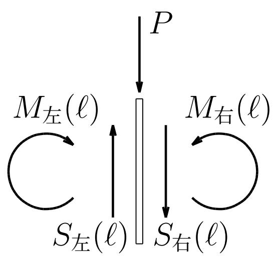
それぞれ z について 4 回積分してみると、

$0 < z < \ell$ について

$EIv''''_{左} = 0$
$EIv'''_{左} = A$
$EIv''_{左} = Az + B$
$EIv'_{左} = \frac{A}{2}z^2 + Bz + C$
$EIv_{左} = \frac{A}{6}z^3 + \frac{B}{2}z^2 + Cz + D$

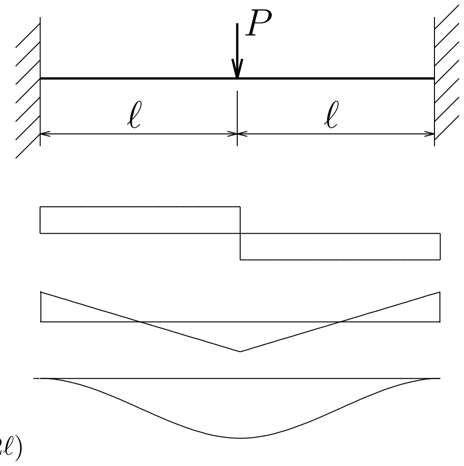
$\ell < z < 2\ell$ について
$EIv''''_{右} = 0$
$EIv'''_{右} = F$
$EIv''_{右} = Fz + G$
$EIv'_{右} = \frac{F}{2}z^2 + Gz + H$
$EIv_{右} = \frac{F}{6}z^3 + \frac{G}{2}z^2 + Hz + J$
となる。
まず**境界条件**として使えるのは、両端でたわみとたわみ角が 0 つまり
$v_{左}(0) = 0,\ v'_{左}(0) = 0,\ v_{右}(2\ell) = 0,\ v'_{右}(2\ell) = 0$
の 4 つの条件で、これらの条件から、
$C = 0$
$D = 0$
$H = -2F\ell^2 - 2\ell G$
$J = \frac{8}{3}F\ell^3 + 2G\ell^2$
となる。

左右対称による**対称条件**として使えるのは、中央の集中荷重載荷部で、たわみ角が 0 つまり、
$v'_{左}(\ell) = 0$ から
$\frac{A}{2}\ell^2 + B\ell = 0$
あと、両端の支点反力は左右対称だから $\frac{P}{2}$ になるから、せん断力も $S_{左} = -S_{右} = \frac{P}{2}$. もう少しちゃんと考えたければ、中央の集中荷重載荷部の微小部分を図のように薄くスライスして切り取ってみると、



鉛直方向の力のつりあい (下 +): $-S_{左}(\ell) + P + S_{右}(\ell) = 0$
となる。左右対称だから $S_{左}(\ell) = -S_{右}(\ell)$ となる。よって、$S_{左}(\ell) = \frac{P}{2}, S_{右}(\ell) = -\frac{P}{2}$ となる。また、このスライスの厚さが 0 だとしてモーメントのつりあいを考えると
モーメントのつりあい (左まわり正): $-M_{左}(\ell) + M_{右}(\ell) = 0$
となる。 せん断力は $S = -EIv'''$ と曲げモーメントは $M = -EIv''$ とそれぞれ関係づけられるから、これらのつりあい条件は、
$S_{左} = -EIv'''_{左} = \frac{P}{2}$
$S_{右} = -EIv'''_{右} = -\frac{P}{2}$
$-(-EIv''_{左}(\ell)) + (-EIv''_{右}(\ell)) = 0$
と書けるが、これらの式を用いて
$A = -\frac{P}{2}$

$F = \frac{P}{2}$
$B = \frac{P\ell}{4}$
$G = -\frac{3}{4}P\ell$
$H = \frac{P\ell^2}{2}$
$J = -\frac{P\ell^3}{6}$
が得られる。



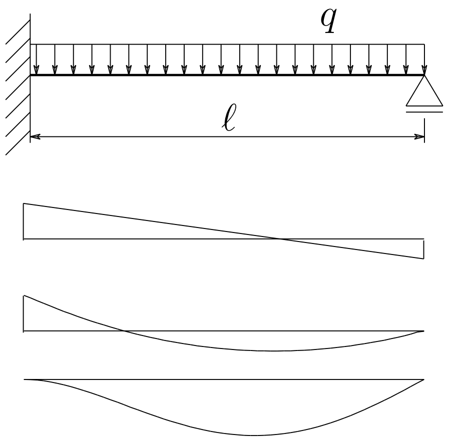
よって、たわみは
$v_{左} = \frac{P}{24EI}(-2z^3 + 3\ell z^2) \quad (0 < z < \ell)$
$v_{右} = \frac{P}{24EI}(2z^3 - 9\ell z^2 + 12\ell^2 z - 4\ell^3) \quad (\ell < z < 2\ell)$

せん断力は、
$S_{左}(z) = -EIv'''_{左}(z) = -A = \frac{P}{2} \quad (0 < z < \ell)$
$S_{右}(z) = -EIv'''_{右}(z) = -F = -\frac{P}{2} \quad (\ell < z < 2\ell)$

曲げモーメントは、
$M_{左}(z) = -EIv''_{左}(z) = -Az - B = \frac{P}{4}(2z - \ell) \quad (0 < z < \ell)$
$M_{右}(z) = -EIv''_{右}(z) = -Fz - G = \frac{P}{4}(-2z + 3\ell) \quad (\ell < z < 2\ell)$
$M_{左}(\ell) = M_{右}(\ell) = \frac{P\ell}{4}$

52　問 2

左端から右端まで等分布荷重が作用する問題は、場合分けしなくていいから積分定数が 4 つですみ、両端の境界条件だけで解けてしまう。

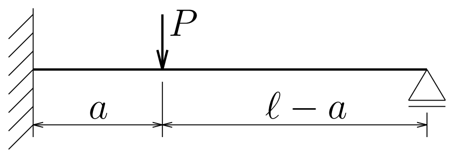


梁の支配微分方程式は $-EIv'''' + q = 0$ だから、
$EIv'''' = q$
$EIv''' = qz + A$
$EIv'' = \frac{q}{2}z^2 + Az + B$
$EIv' = \frac{q}{6}z^3 + \frac{A}{2}z^2 + Bz + C$
$EIv = \frac{q}{24}z^4 + \frac{A}{6}z^3 + \frac{B}{2}z^2 + Cz + D$
境界条件は左端でたわみとたわみ角が 0, 右端でたわみと曲げモーメントが 0 つまり、
$v(0) = 0, v'(0) = 0, v(\ell) = 0, v''(\ell) = 0$
これらより、
$A = -\frac{5}{8}q\ell$
$B = \frac{q\ell^2}{8}$
よってたわみは
$v = \frac{q}{48EI}(2z^4 - 5\ell z^3 + 3\ell^2 z^2)$

せん断力は
$S = -EIv''' = -qz - A = \frac{q}{8}(-8z + 5\ell)$
曲げモーメントは
$M = -EIv'' = -\frac{q}{2}z^2 - Az - B = \frac{q}{8}(-4z^2 + 5\ell z - \ell^2)$

53 問 3

図のような左端固定、右端ローラー支承で集中荷重を受ける梁の左端を原点とし、梁軸に沿って右向きに z 軸を取り、たわみ $v(z)$ を z の関数として求めよ。



54 解答

便宜上、$0 < z < a$ の左側のたわみを $v_{左}$ と書いて、$a < z < \ell$ の右側のたわみを $v_{右}$ と書くことにし、$\frac{d}{dz}$ の微分を $'$ で表すと、分布外力がないので、$0 < z < a$ について
$EIv_{左}'''' = 0$
$EIv_{左}''' = A$
$EIv_{左}'' = Az + B$
$EIv_{左}' = \frac{A}{2}z^2 + Bz + C$
$EIv_{左} = \frac{A}{6}z^3 + \frac{B}{2}z^2 + Cz + D$

$a < z < \ell$ について
$EIv_{右}'''' = 0$
$EIv_{右}''' = F$
$EIv_{右}'' = Fz + G$
$EIv_{右}' = \frac{F}{2}z^2 + Gz + H$
$EIv_{右} = \frac{F}{6}z^3 + \frac{G}{2}z^2 + Hz + J$

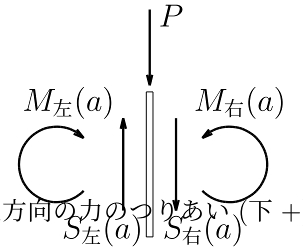
54.1 境界条件

左端の境界条件は固定端だからたわみとたわみ角が 0, つまり
$v_{左}(0) = 0, v_{左}'(0) = 0$ より
$D = 0, C = 0$
右端の境界条件はローラー支承だからたわみとモーメントが 0, つまり
$v_{右}(\ell) = 0, v_{右}''(\ell) = 0$ より
$G = -F\ell$
$J = \frac{F}{3}\ell^3 - H\ell$
$EIv_{右}'' = Fz - F\ell$

$EIv'_{右} = \frac{F}{2}z^2 - F\ell z + H$
$EIv_{右} = \frac{F}{6}z^3 - \frac{F\ell}{2}z^2 + Hz + \frac{F}{3}\ell^3 - H\ell$

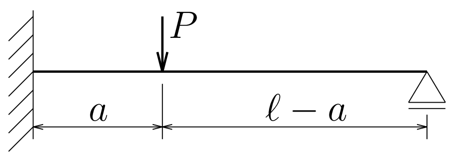
54.2 連続条件

集中荷重載荷部 $(z = a)$ での連続条件は、たわみとたわみ角が連続、つまり
$v_{左}(a) = v_{右}(a)$
$v'_{左}(a) = v'_{右}(a)$
これらを用いて式を整理すると以下の 2 式が得られる。
$a^2A + 2aB + (2\ell a - a^2)F = 2H$
$a^3A + 3a^2B - (a^3 - 3\ell a^2 + 2\ell^3)F + 6(\ell - a)H = 0$
H を消去しておくと、
$(-2a^3 + 3\ell a^2)A + (-3a^2 + 6\ell a)B + (2a^3 - 6\ell a^2 + 6\ell^2 a - 2\ell^3)F = 0$

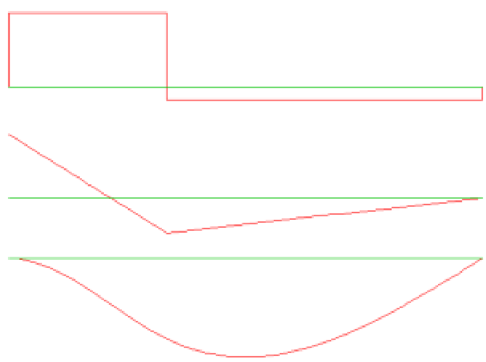


54.3 つりあい条件

$z = a$ の部分の微小なスライスを切り出してつりあい条件を考えると、鉛直方向の力のつりあい (下 +):
$-S_{左}(a) + P + S_{右}(a) = 0$
となる。また、このスライスの厚さが 0 だとしてモーメントのつりあいを考えると
モーメントのつりあい (左まわり正): $-M_{左}(a) + M_{右}(a) = 0$
となる。 せん断力は $S = -EIv'''$ と曲げモーメントは $M = -EIv''$ とそれぞれ関係づけられるから、これらのつりあい条件は、
$-(-EIv'''_{左}(a)) + P + (-EIv'''_{右}(a)) = 0$
$-(-EIv''_{左}(a)) + (-EIv''_{右}(a)) = 0$



これらより
$A = F - P$
$aA + B + (\ell - a)F = 0$
が得られる。A を消去すると、
$B = a - \ell F$
連続条件のところで A と B と F だけで表した式
$(-2a^3 + 3\ell a^2)A + (-3a^2 + 6\ell a)B + (2a^3 - 6\ell a^2 + 6\ell^2 a - 2\ell^3)F = 0$
に $A = F - P$ と $B = a - \ell F$ を代入して F を求めると、
$F = \frac{Pa^2}{2\ell^3}(3\ell - a)$



後は順次 代入していって

$G = \frac{Pa^2}{2\ell^2}(a - 3\ell)$
$B = \frac{P}{2\ell^2}(2\ell^2 a - 3\ell a^2 + a^3)$
$A = \frac{P}{2\ell^3}(3\ell a^2 - a^3 - 2\ell^3)$
$H = \frac{a^2}{2}$
$J = -\frac{a^3}{6}$
よってたわみは、$v_{左}(z) = \frac{P(\ell - a)}{12\ell^3 EI}\{(a^2 - 2\ell a - 2\ell^2)z^3 + (6\ell^2 a - 3\ell a^2)z^2\} \quad (0 < z < a)$
$v_{右}(z) = \frac{Pa^2}{12\ell^3 EI}\{(3\ell - a)z^3 - 3\ell(3\ell - a)z^2 + 6\ell^3 z - 2\ell^3 a\} \quad (a < z < \ell)$
せん断力は、
$S_{左} = -EIv'''_{左} = -A = \frac{P}{2\ell^3}(a^3 - 3\ell a^2 + 2\ell^3) \quad (0 < z < a)$
$S_{右} = -EIv'''_{右} = -F = \frac{Pa^2}{2\ell^3}(a - 3\ell) \quad (a < z < \ell)$
曲げモーメントは、
$M_{左} = -EIv''_{左} = -Az - B$
$= \frac{P}{2\ell^3}\{(a^3 - 3\ell a^2 + 2\ell^3)z - (a^3 - 3\ell a^2 + 2\ell^2 a)\ell\} \quad (0 < z < a)$
$M_{右} = -EIv''_{右} = -Fz - G$
$= \frac{Pa^2}{2\ell^3}\{(a - 3\ell)z - (a - 3\ell)\ell\} \quad (a < z < \ell)$

第 XIII 部
重ね合わせの原理

不静定梁のたわみは、 梁の支配微分方程式 $-EI\frac{d^4 v(z)}{dz^4} + q(z) = 0$

を 4 回積分して、境界条件や連続条件を用いて積分定数を決定すれば求まる し、それが数学的には明解な解法だと思う。が、集中外力が多かったり、連続梁だったりして z 座標の場合分けが 2 箇所、3 箇所と増えてくると、積分定数も 8 個、12 個と増えてくるので、紙と鉛筆で計算間違いをせずに解くのはなかなかしんどくなってくる。そこで、比較的少ない計算負荷で不静定梁を解ける便法の 1 つとして、「重ね合わせの原理」を用いる方法を紹介しておく。「重ね合わせの原理」というのは、

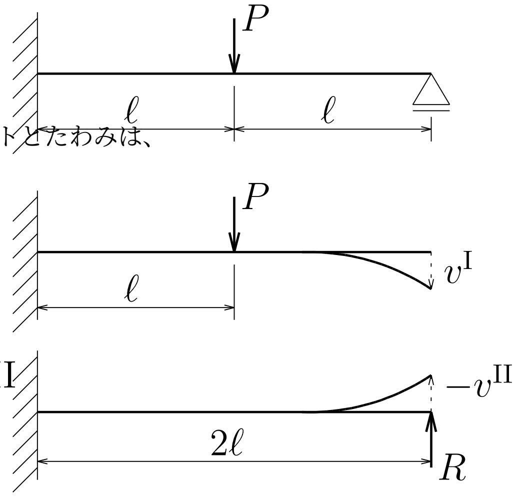
> 複数の外力が構造物に作用するとき、そのたわみや断面力などは、1 つずつの外力が同じ構造物に作用した場合のたわみや断面力などを足し合わせたものと等しくなる

という原理で、外力と変形との間に線形関係が成り立つような場合に成り立つ。という訳で、 境界値問題として苦労して解いた のと同じ図のような左端固定、右端ローラー支承で中央に集中荷重を受ける不静定梁について、重ね合わせの原理を用いて梁のたわみと断面力を求めてみる。重ね合わせの原理を用いる場合、まずは適当な支承の拘束を取り除いた静定梁 I を考え、次にその同じ静定梁の拘束を取り除いた部分に、元の不静定構造物では生じているはずの不静定反力が外力として載荷されている静定梁 II を考え、これらの 2 つの静定梁 I と II を足し合わせると元の梁になると考える。その際、2 つの梁を足し合わせた時に、拘束を取り除いた部分のたわみなどの変位が、元の拘束がある状態の値 (0 とか) に一致しなければならないという条件が付加される。

例えば、図の梁について、右端のローラー支承の鉛直方向の拘束を取り除いた静定梁 I と、その右端に元

の梁では生じているはずの不静定反力 R が作用している静定梁 II とを足し合わせると元の梁になると考えてみる。これら 2 つの梁を足して元の梁になるためには、足した後に右端のたわみが 0 になる必要があるので、$v^I(2\ell) + v^{II}(2\ell) = 0$ という条件が付加される。

まず、梁の左端を原点として梁軸に沿って右側正に z 軸を取る。便宜上、元の梁と梁 I の $0 < z < \ell$ の左半分のたわみを $v_{左}, v^I_{左}$ と書いて、元の梁と梁 I の $\ell < z < 2\ell$ の右半分のたわみを $v_{右}, v^I_{右}$ と書くことにする。



梁 I

静定梁のたわみの練習問題で解いたように、梁 I の曲げモーメントとたわみは、

$0 < z < \ell$ について
$M^I_{左} = P(z - \ell)$
$v^I_{左} = \frac{P}{6EI}(3\ell z^2 - z^3)$

$\ell < z < 2\ell$ について
$M^I_{右} = 0$
$v^I_{右} = \frac{P}{6EI}(3\ell^2 z - \ell^3)$
先端のたわみ: $v^I_{右}(2\ell) = \frac{5P\ell^3}{6EI}$

梁 II

曲げモーメントは
$M = R(2\ell - z)$
$v^I_{左}$ の P と ℓ にそれぞれ $-R$ と 2ℓ を代入し、
$v^{II} = \frac{R}{6EI}(z^3 - 6\ell z^2)$
先端のたわみ:$v^{II}(2\ell) = -\frac{8R\ell^3}{3EI}$

右端の条件

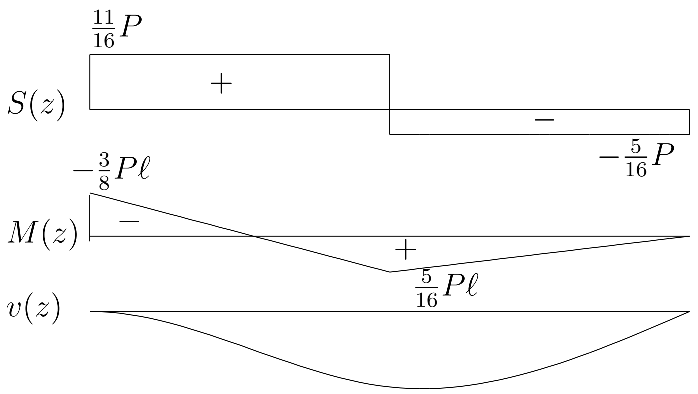
元の梁の右端はローラー支承でたわみは 0 でなければならないので、梁 I と梁 II の右端のたわみを足し合わせたものは 0 となる。
$v^I_{右}(2\ell) + v^{II}(2\ell) = 0$
$\frac{5P\ell^3}{6EI} + (-\frac{8R\ell^3}{3EI}) = 0$
よって、$R = \frac{5P}{16}$ となり
$v^{II} = \frac{5P}{96EI}(z^3 - 6\ell z^2)$

元の梁=梁 I+ 梁 II

元の梁のたわみは、梁 I と梁 II のたわみを足し合わせたものだから
$0 < z < \ell$ では
$v^{元}_{左} = v^{I}_{左} + v^{II}$
$= \frac{P}{6EI}(3\ell z^2 - z^3) + \frac{5P}{96EI}(z^3 - 6\ell z^2)$
$= \frac{P}{96EI}(-11z^3 + 18\ell z^2)$
$\ell < z < 2\ell$ では、
$v^{元}_{右} = v^{I}_{右} + v^{II}$
$= \frac{P}{6EI}(3\ell^2 z - \ell^3) + \frac{5P}{96EI}(z^3 - 6\ell z^2)$
$= \frac{P}{96EI}(5z^3 - 30\ell z^2 + 48\ell^2 z - 16\ell^3)$

元の梁の曲げモーメントは梁 I と梁 II の曲げモーメントを足し合わせたものだから、

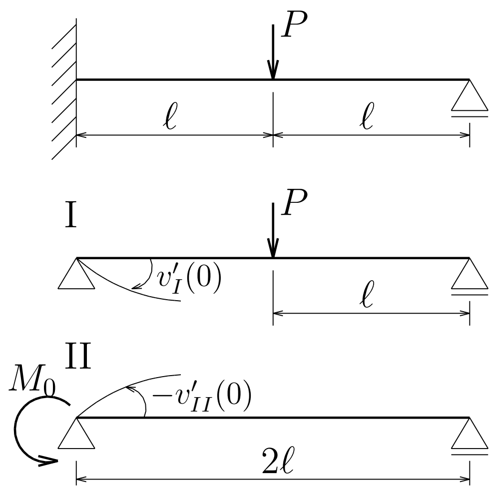
$0 < z < \ell$ では
$M^{元}_{左} = M^{I}_{左} + M^{II}$
$= P(z - \ell) + \frac{5P}{16}(2\ell - z)$
$= \frac{P}{16}(11z - 6\ell)$
$\ell < z < 2\ell$ では、
$M^{元}_{右} = M^{I}_{右} + M^{II}$
$= 0 + \frac{5P}{16}(2\ell - z)$
$= \frac{5P}{16}(2\ell - z)$



せん断力は、曲げモーメントを微分して
$S_{左}(z) = M'_{左}(z) = \frac{11}{16}P \quad (0 < z < \ell)$
$S_{右}(z) = M'_{右}(z) = -\frac{5}{16}P \quad (\ell < z < 2\ell)$

次に同じ問題を、別の重ね合わせかたで解いてみよう。

今度は図のように、左端の固定端の回転拘束を取り除いた静定梁 I と、その左端に元の梁では生じているはずの不静定モーメント反力 M_0 が作用している静定梁 II とを足し合わせると元の梁になると考えてみる。これら 2 つの梁を足し合わせて元の梁になるためには、足した後に左端のたわみ角が 0 になる必要があるので、$v'_I(0) + v'_{II}(0) = 0$ という条件が付加される。



梁 I

まず梁 I のたわみは、ちゃんと解くのがめんどくさいので 静定梁のたわみ の問題の $\frac{\ell}{2}$ を ℓ に置き換えればいいので、 静定梁のたわみ の問題のたわみの ℓ に 2ℓ を代入すると、

$v^I_{左} = \frac{P}{12EI}(3\ell^2 z - z^3) \qquad (0 < z < \ell)$
$v^I_{右} = \frac{P}{12EI}(z^3 - 6\ell z^2 + 9\ell^2 z - 2\ell^3) \qquad (\ell < z < 2\ell)$

と求まる (ちゃんと解いて確かめて下さい)。左端のたわみ角は、
${v^I_{左}}' = \frac{P}{12EI}(3\ell^2 - 3z^2)$
$= \frac{P}{4EI}(\ell^2 - z^2)$ より
${v^I_{左}}'(0) = \frac{P\ell^2}{4EI}$

梁 II

力のつりあいから支点反力を求めると左右の鉛直反力はそれぞれ $\frac{M_0}{2\ell}, -\frac{M_0}{2\ell}$ となり、断面を切ってつりあいを考えると曲げモーメントは、
$M = \frac{M_0}{2\ell}(z - 2\ell)$
$M = -EIv''$ より、
$EI{v^{II}}'' = \frac{M_0}{2\ell}(-z + 2\ell)$
$EI{v^{II}}' = \frac{M_0}{2\ell}(-\frac{z^2}{2} + 2\ell z) + F$
$EIv^{II} = \frac{M_0}{2\ell}(-\frac{z^3}{6} + \ell z^2) + Fz + G$
境界条件 $v(0) = 0, v(2\ell) = 0$ より
$G = 0$
$F = -\frac{2\ell M_0}{3}$
左端のたわみ角は
${v^{II}}'(0) = -\frac{2\ell M_0}{3EI}$

左端の条件

${v^I_{左}}'(0) + {v^{II}}'(0) = 0$ より
$\frac{P\ell^2}{4EI} - \frac{2\ell M_0}{3EI} = 0$
よって $M_0 = \frac{3P\ell}{8}$
$v^{II} = \frac{P}{96EI}(-3z^3 + 18\ell z^2 - 24\ell^2 z)$

元の梁=梁 I+ 梁 II

$0 < z < \ell$

$v^I_{左} + v^{II} = \frac{P}{96EI}(24\ell^2 z - 8z^3 - 3z^3 + 18\ell z^2 - 24\ell^2 z)$

$= \frac{P}{96EI}(-11z^3 + 18\ell z^2) \qquad (0 < z < \ell)$

$\ell < z < 2\ell$

$v^I_{右} + v^{II} = \frac{P}{96EI}(8z^3 - 48\ell z^2 + 72\ell^2 z - 16\ell^3 - 3z^3 + 18\ell z^2 - 24\ell^2 z)$

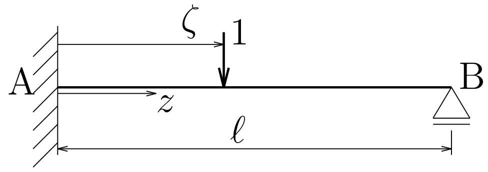
$= \frac{P}{96EI}(5z^3 - 30\ell z^2 + 48\ell^2 z - 16\ell^3) \qquad (\ell < z < 2\ell)$

第 XIV 部

不静定梁の影響線

不静定梁の影響線も基本的に 静定梁の影響線 と同じ要領で求められる。つまり、

1. 単位荷重の位置 (ζ) を定数とみなして、普通に反力、断面力、たわみなどを z の関数として求める
2. 着目点の座標 ($z = \frac{\ell}{2}$ など) を求めた断面力やたわみの式に代入する
   - その際、単位荷重が着目点より左側にある場合 (つまり着目点が単位荷重より**右側**にある場合) は $\zeta < z < \ell$ の式を使い
   - 単位荷重が着目点より右側にある場合 (つまり着目点が単位荷重より**左側**にある場合) は $0 < z < \zeta$ の式を使う
3. 求めた影響線の関数を横軸を ζ にとってグラフに描く



図のような左端固定、右端ローラー支承の不静定梁の両端の反力と中央 ($z = \frac{\ell}{2}$) のたわみの影響線を求めてみよう。

まずは、単位荷重の位置を表す ζ が定数だと考えて、普通に反力や断面力、たわみを z の関数として求める。

この問題は、不静定梁のたわみの練習問題-問 3 で、$a = \zeta$, $P = 1$ と置いたものと同じだから、

便宜上、$0 < z < \zeta$ の左側のたわみを $v_{左}$ と書いて、$\zeta < z < \ell$ の右側のたわみを $v_{右}$ と書くことにすると、たわみは

$v_{左}(z, \zeta) = \frac{(\ell - \zeta)}{12\ell^3 EI}\{(\zeta^2 - 2\ell\zeta - 2\ell^2)z^3 + (6\ell^2\zeta - 3\ell\zeta^2)z^2\} \quad (0 < z < \zeta)$

$v_{右}(z, \zeta) = \frac{\zeta^2}{12\ell^3 EI}\{(3\ell - \zeta)z^3 - 3\ell(3\ell - \zeta)z^2 + 6\ell^3 z - 2\ell^3\zeta\} \quad (\zeta < z < \ell)$

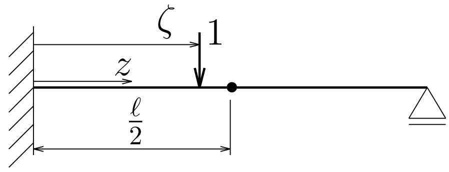
せん断力は、

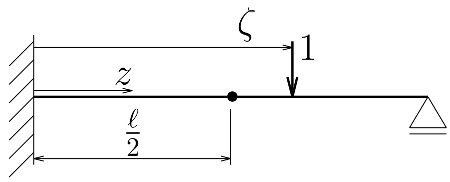
$S_{左}(\zeta) = \frac{\zeta^3 - 3\ell\zeta^2 + 2\ell^3}{2\ell^3} \quad (0 < z < \zeta)$

$S_{右}(\zeta) = \frac{\zeta^2}{2\ell^3}(\zeta - 3\ell) \quad (\zeta < z < \ell)$

曲げモーメントは、

$M_{左}(z,\zeta) == \frac{1}{2\ell^3}\{(\zeta^3-3\ell\zeta^2+2\ell^3)z-(\zeta^3-3\ell\zeta^2+2\ell^2\zeta)\ell\} \quad (0<z<\zeta)$
$M_{右} == \frac{\zeta^2}{2\ell^3}\{(\zeta-3\ell)z-(\zeta-3\ell)\ell\} \quad (\zeta<z<\ell)$
となる。
まず、両端の鉛直反力は
$V_A(\zeta)=S_{左}=\frac{\zeta^3-3\ell\zeta^2+2\ell^3}{2\ell^3}$
$V_B(\zeta)=-S_{右}=\frac{-\zeta^3+3\ell\zeta^2}{2\ell^3}$
左端のモーメント反力は、$0<z<\zeta$ のモーメントの式 $M_{左}$ に $z=0$ を代入して
$M_A(\zeta)=M_{左}(z=0,\zeta)=\frac{-\zeta^3+3\ell\zeta^2-2\ell^2\zeta}{2\ell^2}$
両端の反力の影響線については、これらを ζ の関数として ζ を横軸にとってグラフを描けばよい。
中央 $(z=\frac{\ell}{2})$ のたわみ等の影響線を描く場合はちょっと注意が必要である。





$0<\zeta<\frac{\ell}{2}$ の場合
単位荷重が着目点の $z=\frac{\ell}{2}$ よりも左側にある場合 (つまり着目点が単位荷重よりも**右側**にある場合ということだから)、着目点のたわみを表す式は、$\zeta<z<\ell$ の場合の式つまり $v_{右}(z,\zeta)$ になる。よって、たわみの影響線は
$v_{右}(z=\frac{\ell}{2},\zeta)=\frac{-11\zeta^3+9\ell\zeta^2}{96EI} \quad (0<\zeta<\frac{\ell}{2})$

$\frac{\ell}{2}<\zeta<\ell$ の場合
単位荷重が着目点の $z=\frac{\ell}{2}$ よりも右側にある場合 (つまり着目点が単位荷重よりも**左側**にある場合ということだから)、着目点のたわみを表す式は、$0<z<\zeta$ の場合の式つまり $v_{左}(z,\zeta)$ になる。
よって、たわみの影響線は
$v_{左}(z=\frac{\ell}{2},\zeta)=\frac{1}{96EI}(5\zeta^3-15\ell\zeta^2+12\ell^2\zeta-2\ell^3) \quad (\frac{\ell}{2}<\zeta<\ell)$